*Az Arany János programban részt vevő iskolák matematika versenye*

*12. évfolyam*

2014

*Megoldásvázlatok, pontozás*

1. **Oldja meg a természetes számok halmazán a** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=1$ **egyenletet.**

*Megoldás:*

*Egyenletünket rendezve és mégyzetre emelve*$ \sqrt{2x+3}=1-\sqrt{x+1}, $

$2x+3=1-2\sqrt{x+1}+x+1$ *( 1 pont ) , illetve* $x+1=-2\sqrt{x+1}$ *adódik ( 1 pont ). Innét négyzetre emelve és rendezve:* $x^{2}-2x-3=0 $*( 1 pont ),*

*ennek gyökei :* $x\_{1}=-1 , x\_{2}=3 ( 1 pont )$*. A -1 nem természetes szám, a 3 pedig nem megoldás( 1 pont ). Tehát az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán( 1 pont ).*

**∑ 6 pont**

*Megjegyzés. Az egyenletet jobban megnézve azonnal látható, hogy nincs természetes megoldása, ugyanis* $x\geq 0 , \sqrt{2x+3}\geq \sqrt{3} és \sqrt{x+1} \geq 1 összeg nem lehet 1.$

1. **Oldja meg a valós számok halmazán az  egyenletet.**

*Megoldás:*

*Alakítsuk át egyenletünket:* $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x}-8∙\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}-128=0 .Ez \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}-re másodfokú $

*( 1 pont ), ennek megoldásai :*$ \frac{8\pm \sqrt{64+512}}{2} , azaz 18 és-8 $*( 1 pont ).* $Ez utóbbiból az eredeti egyenletre nem kapunk megoldást$ *( 1 pont ).*

*Így* $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=16=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, 3x=-4 \left( a monotonitás miatt\right) \left( 1 pont \right), $

$$x=-\frac{4}{3} ( 1 pont ). $$

*Behelyettesítéssel meggyőződhetünk az eredmény helyességéről( 1 pont ).*

**∑ 6 pont**

1. **Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:**

 ****

*Megoldás:*

$\left(1\right) és \left(3\right)-ból x^{3}+y^{3}=3\left(x+y\right),azaz \left(x+y\right)\left(x^{2}-xy+y^{2}-3\right)=0$*( 1 pont ).*

*Ha* $x+y=0 , akkor \left(1\right) alapján z=0, így \left(2\right)alapján x^{2}+y^{2}=0, vagyis$

*x = y = 0( 1 pont ). Ha* $x+y\ne 0 , akkor xy=x^{2}+y^{2}-3=5z-3 ( 1 pont ).$

$$Másrészt 5z=x^{2}+y^{2}= \left(x+y\right)^{2}-2xy , 5z=9z^{2}-10z+6 , 9z^{2}-15z+6=0$$

*( 1 pont ).*

*Ennek gyökei* $z\_{1}=1 , z\_{2}=\frac{2}{3}$ *( 1 pont ).*

*Ha* $z\_{1}=1, akkor az \left. \begin{matrix}x+y=3\\xy=2\end{matrix}\right\} egyenletrendszerből az \left(1 ;2 ;1\right) és a \left(2 ;1 ;1\right) $

*megoldásokat kapjuk. Ha* $z=\frac{2}{3} , akkor pedig a \left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{6}}{3};\frac{2}{3}\right) és \left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3};\frac{2}{3}\right) $

*megoldásokat kapjuk( 1 pont ).*

 *Egyenletrendszerünknek tehát öt számhármas tesz eleget( 1 pont ).*

**∑ 7 pont**

1. **Az ABC , C –ben derékszögű háromszög egy belső O pontját a csúcsokkal összekötve egyenlő területű háromszögeket kapunk.**

**Igazolja, hogy ekkor** $\overbar{OA}^{2}+\overbar{OB}^{2}=5 \overbar{OC}^{2}$**.**

*Megoldás:*

B

*Használjuk az ábra jelöléseit!*

y

x

a

O

c

A

C

*( 1 pont )*

b

*Felírva a kétszeres területeket:*

$ax=by=\frac{ab}{2} \left( 1 pont \right), amiből x=\frac{b}{3} és y=\frac{a}{3} ( 1 pont ).Ekkor $

$\overbar{OA}^{2}=y^{2}+\left(\frac{2b}{3}\right)^{2} , \overbar{OB}^{2}=x^{2}+\left(\frac{2a}{3}\right)^{2}\left( 1 pont \right)$*,*

$ \overbar{OA}^{2}+\overbar{OB}^{2}=\left(\frac{a}{3}\right)^{2}+\left(\frac{b}{3}\right)^{2}+\left(\frac{2b}{3}\right)^{2}+\left(\frac{2a}{3}\right)^{2}=\frac{5a^{2}}{9} +\frac{5b^{2}}{9}$ *( 1 pont ).*

$\overbar{OC}^{2}=x^{2}+\left(\frac{a}{3}\right)^{2}=y^{2}+\left(\frac{b}{3}\right)^{2}=\frac{a^{2}}{9}+\frac{b^{2}}{9} ( 1 pont )$*,*

 *azaz* $\overbar{OA}^{2}+\overbar{OB}^{2}=5∙\overbar{OC}^{2}( 1 pont ) . $**∑ 7 pont**

*Megjegyzés: O a háromszög súlypontja.*

1. **Egy urnában 11 grammos fehér és 12 grammos piros golyók vannak. A golyók össztömege 151 gramm.**
2. **Legalább hány golyót kell az urnából kihúzni ( bekötött szemmel ), hogy biztosak legyünk abban, hogy a kihúzott golyók között vannak különböző színűek?**
3. **Legfeljebb hány golyót lehet kihúzni úgy, hogy az urnában maradtak különböző színűek?**

*Megoldás:*

*Jelölje x és y a fehér illetve a piros golyók számát( 1 pont ).*

*Ekkor* $11x+12y=151 \left( 1 pont \right), $

$x=\frac{151-12y}{11}=\frac{11\left(13-y\right)+8-y}{11}=13-y+\frac{8-y}{11} \in N( 1 pont ).$

*A feltételnek y = 8 felel meg, ekkor x = 5, azaz 5 fehér és 8 piros golyó van az urnában*

 *(1 pont ).*

1. *Legalább 9 golyót kell kihúzni ahhoz, hogy legyen köztük különböző színű( 2 pont ).*
2. *Legfeljebb négyet húzhatunk ki, hogy az urnában maradjanak különböző színűek*

*(2 pont ).*

**∑ 8 pont**

1. **Mely valós *a,b,c* értékek esetén lesz** $x^{3}-ax^{2}+bx-c=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-c\right)$ **azonosság?**

*Megoldás:*

 *Elvégezve jobb oldalon a kijelölt műveleteket*

$x^{3}-\left(a+b+c\right)x^{2}+\left(ab+bc+ca\right)x-abc$ *adódik( 1 pont ). Ezt a bal oldallal összevetve a következő egyenleteket kapjuk:*

$$\left(1\right) a=a+b+c , b+c=0 ( 1 pont ) ; $$

$$\left(2\right) b=ab+bc+ca ( 1 pont ), $$

$$\left(3\right) c=abc , azaz c=0 vagy ab=1 ( 1 pont ). $$

$\left(2\right): b=a\left(b+c\right)+bc , b=bc, b=0 vagy c=1$ *( 1 pont ).*

$b=0$*−ra c=0, a tetszőleges valós szám. Ekkor* $x^{3}-ax^{2}≡\left(x-a\right)\left(x-0\right)\left(x-0\right)$ *azonosság( 1 pont ).*

*c =* $1$ *esetén b =* $-1$ *, a =* $-1$ *és* $x^{3}+x^{2}-x-1≡\left(x+1\right)\left(x+1\right)(x-1)$ *ismét azonosság( 1 pont ).*

*Tehát a keresett ( a ; b ; c ) értékek : (*$a\in R;0 ;0 ) és \left( -1 ; -1 ;1 \right)( 1 pont ) .$

**∑ 8 pont**

*Megjegyzés: Az* $x^{3}-ax^{2}+bx-c=$ *0 egyenlet gyökei a ; b és c . Így felírhatjuk a következő egyenletrendszert:*

$$\left(1\right) a^{3}-a∙a^{2}+b∙a-c=0$$

$$\left(2\right) b^{3}-a∙b^{2}+b∙b-c=0$$

$\left(3\right) c^{3}-a∙c^{2}+b∙c-c=0$.

*Megoldva az egyenletrendszert a fenti eredményekre jutunk.*

1. **Adja meg a szabályos ötszögbe írt és a köré írt körök területei arányának pontos értékét.**

*Megoldás: Tekintsük a szabályos ötszög egy szeletét és használjuk az ábra jelöléseit!*

*R a beírt, R a köré írt kör sugara.*

a

r

R

360

360

 *(1 pont)*

*A feladat lényegében* $\left(\frac{r}{R}\right)^{2}=cos^{2}36^{0} megadása$*(1 pont)*$.$

*Nézzük az egység oldalú szabályos tízszög egy szeletét! Az egyik szögfelezőt berajzolva két hasonló háromszöget kapunk. A megfelelő oldalak aránya* $\frac{x}{1}=\frac{1}{x+1} , $

$$ebből x^{2}+x-1=0 ,$$

$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} , \left( \frac{-1-\sqrt{5}}{2} nem lehet egy szakasz hossza\right) $*(1 pont)* .

360

360

360

 1

 1

 x

 1

 *(1 pont)*

*Írjuk fel a koszinusztételt!* $ 1^{2}=\left(x+1\right)^{2}+\left(x+1\right)^{2}-2\left(x+1\right)\left(x+1\right)cos36^{0}$ *,*

$1=2\left(x+1\right)^{2}\left(1-cos36^{0}\right)(1 pont). $

*Írjuk be x* *értékét :* $1=2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1\right)^{2}\left(1-cos36^{0}\right)$*,*

$2=\left(1+\sqrt{5}\right)^{2}\left(1-cos36^{0}\right)(1 pont)$*, amiből*

$cos36^{0}=1-\frac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2}}=1-\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}= 1-\frac{1}{3+\sqrt{5}}=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4} $*(1 pont).*

*A két terület arány tehát* $ cos^{2}36^{0}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{v}\right)^{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ *(1 pont).* **∑ 8 pont**