*Az Arany János programban részt vevő iskolák matematika versenye*

*12. évfolyam*

2014

*Megoldásvázlatok, pontozás*

1. **Oldja meg a természetes számok halmazán a egyenletet.**

*Megoldás:*

*Egyenletünket rendezve és mégyzetre emelve*

*( 1 pont ) , illetve adódik ( 1 pont ). Innét négyzetre emelve és rendezve: ( 1 pont ),*

*ennek gyökei : . A -1 nem természetes szám, a 3 pedig nem megoldás( 1 pont ). Tehát az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán( 1 pont ).*

**∑ 6 pont**

*Megjegyzés. Az egyenletet jobban megnézve azonnal látható, hogy nincs természetes megoldása, ugyanis*

1. **Oldja meg a valós számok halmazán az  egyenletet.**

*Megoldás:*

*Alakítsuk át egyenletünket:*

*( 1 pont ), ennek megoldásai :( 1 pont ). ( 1 pont ).*

*Így*

*Behelyettesítéssel meggyőződhetünk az eredmény helyességéről( 1 pont ).*

**∑ 6 pont**

1. **Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:**

****

*Megoldás:*

*( 1 pont ).*

*Ha*

*x = y = 0( 1 pont ). Ha*

*( 1 pont ).*

*Ennek gyökei ( 1 pont ).*

*Ha*

*megoldásokat kapjuk. Ha*

*megoldásokat kapjuk( 1 pont ).*

*Egyenletrendszerünknek tehát öt számhármas tesz eleget( 1 pont ).*

**∑ 7 pont**

1. **Az ABC , C –ben derékszögű háromszög egy belső O pontját a csúcsokkal összekötve egyenlő területű háromszögeket kapunk.**

**Igazolja, hogy ekkor .**

*Megoldás:*

B

*Használjuk az ábra jelöléseit!*

y

x

a

O

c

A

C

*( 1 pont )*

b

*Felírva a kétszeres területeket:*

*,*

*( 1 pont ).*

*,*

*azaz* **∑ 7 pont**

*Megjegyzés: O a háromszög súlypontja.*

1. **Egy urnában 11 grammos fehér és 12 grammos piros golyók vannak. A golyók össztömege 151 gramm.**
2. **Legalább hány golyót kell az urnából kihúzni ( bekötött szemmel ), hogy biztosak legyünk abban, hogy a kihúzott golyók között vannak különböző színűek?**
3. **Legfeljebb hány golyót lehet kihúzni úgy, hogy az urnában maradtak különböző színűek?**

*Megoldás:*

*Jelölje x és y a fehér illetve a piros golyók számát( 1 pont ).*

*Ekkor*

*A feltételnek y = 8 felel meg, ekkor x = 5, azaz 5 fehér és 8 piros golyó van az urnában*

*(1 pont ).*

1. *Legalább 9 golyót kell kihúzni ahhoz, hogy legyen köztük különböző színű( 2 pont ).*
2. *Legfeljebb négyet húzhatunk ki, hogy az urnában maradjanak különböző színűek*

*(2 pont ).*

**∑ 8 pont**

1. **Mely valós *a,b,c* értékek esetén lesz azonosság?**

*Megoldás:*

*Elvégezve jobb oldalon a kijelölt műveleteket*

*adódik( 1 pont ). Ezt a bal oldallal összevetve a következő egyenleteket kapjuk:*

*( 1 pont ).*

*−ra c=0, a tetszőleges valós szám. Ekkor azonosság( 1 pont ).*

*c = esetén b = , a = és ismét azonosság( 1 pont ).*

*Tehát a keresett ( a ; b ; c ) értékek : (*

**∑ 8 pont**

*Megjegyzés: Az 0 egyenlet gyökei a ; b és c . Így felírhatjuk a következő egyenletrendszert:*

.

*Megoldva az egyenletrendszert a fenti eredményekre jutunk.*

1. **Adja meg a szabályos ötszögbe írt és a köré írt körök területei arányának pontos értékét.**

*Megoldás: Tekintsük a szabályos ötszög egy szeletét és használjuk az ábra jelöléseit!*

*R a beírt, R a köré írt kör sugara.*

a

r

R

360

360

*(1 pont)*

*A feladat lényegében (1 pont)*

*Nézzük az egység oldalú szabályos tízszög egy szeletét! Az egyik szögfelezőt berajzolva két hasonló háromszöget kapunk. A megfelelő oldalak aránya*

*(1 pont)* .

360

360

360

1

1

x

1

*(1 pont)*

*Írjuk fel a koszinusztételt! ,*

*Írjuk be x* *értékét : ,*

*, amiből*

*(1 pont).*

*A két terület arány tehát (1 pont).* **∑ 8 pont**