*Az Arany János programban részt vevő iskolák matematika versenye*

*13. évfolyam*

2014

*Megoldásvázlatok, pontozás*

1. **Egy két hétig tartó matematika táborban 25 tanuló vett részt. Minden nap 8 tanuló asztaliteniszezett, körmérkőzéses rendszerben ( mindenki játszott mindenkivel egy mérkőzést). Bizonyítsa be, hogy voltak olyanok, akik legalább kétszer is megmérkőztek egymással a tábor ideje alatt.**

*Megoldás:*

*Ha mindenki mindenkivel csak egyszer játszott volna, akkor a mérkőzések száma* $\frac{24∙25}{2}=300 $*lett volna( 2 pont ). A feladat alapján* $14∙\frac{7∙8}{2}=392$ *mérkőzésre került sor*

*(2 pont), tehát voltak olyanok, akik legalább kétszer játszottak egymással (2 pont).*

**∑ 6 pont**

1. **Adott 13 általános helyzetű pont az egységnyi élű szabályos tetraéder belsejében vagy a felszínén. Bizonyítsa be, hogy van közöttük négy olyan pont, amelyek által meghatározott tetraéder térfogata legfeljebb** $\frac{\sqrt{2}}{48}$ **.**

*Megoldás:*

*A szabályos tetraéder térfogata* $\frac{\sqrt{2}}{12}$ *(1 pont) , a súlypontja a többi csúccsal négy olyan tetraédert alkot, amelyek térfogata* $\frac{\sqrt{2}}{48}$ *(1 pont). Az adott 13 pont közül 4 egy ilyen tetraéder belsejében vagy a felszínén van (2 pont), tehát az általuk meghatározott tetraéder térfogata legfeljebb* $\frac{\sqrt{2}}{48}$ *(2 pont) .*

**∑ 6 pont**

1. **Bizonyítsa be, hogy ha ( *an* ) mértani sorozat, akkor** $a\_{1}+a\_{2 }; a\_{1}+2a\_{2}+a\_{3 } $**és** $a\_{1}+3a\_{2}+3a\_{3 }+a\_{4}$ **egy mértani sorozat három egymást követő tagja.**

*Megoldás:*

*Legyen az (an) sorozat első tagja a1 , hányadosa q* $\ne $ *0 ( 1 pont ). Ekkor*

$$b\_{1}= a\_{1}+ a\_{2}=a\_{1}\left(1+q\right) \left( 1 pont \right); $$

$$b\_{2}=a\_{1}+2a\_{2}+a\_{3}=a\_{1}\left(1+2q+q^{2}\right)=a\_{1}\left(1+q\right)^{2}\left( 1 pont \right)$$

*és* $b\_{3}=a\_{1}+3a\_{2}+3a\_{3}+a\_{4}=a\_{1}\left(1+3q+3g^{2}+q^{3}\right)=a\_{1}\left(1+q\right)^{3}\left( 2 pont \right)$*.*

*A (bn) sorozat valóban mértani sorozat, a sorozat hányadosa (1+q)*

 *ahol q* $\ne $$-1\left( 1 pont \right)$ *. ( q =* $-1$ *esetén* $ b\_{1}=b\_{2}=b\_{3}=0$ *lenne. )*$ \left( 1 pont \right)$

  **∑ 7 pont**

1. **Oldja meg az egész számok halmazán az** $1+\frac{1}{x-2015}+\frac{1}{y-2015}= \frac{2014}{\left(x-2015\right)\left(y-2015\right)}$ **egyenletet.**

*Megoldás:*

*Azonos átalakításokkal egyenletünk egyenértékű az*

$\left(x-2014\right)\left(y-2014\right)=2015$ *egyenlettel.*

*( A közös nevezővel végigszorozva és rendezve:*

$\left(x-2015\right)\left(y-2015\right)+y-2015+x-2015=2014$

$$\left(x-2015\right)\left(y-2015+1\right)+y-2015=2014,$$

$ \left(y-2014\right)\left(x-2015+1\right)=2015 $*) ( 3 pont )*

$$2015=1∙2015=5∙43=43∙5=2015∙1=\left(-1\right)∙\left(-2015\right)=\left(-5\right)∙\left(-43\right)=$$

$=\left(-43\right)∙\left(-5\right)=\left(-2015\right)∙(-1)$ *.( 2 pont )*

*Ez alapján már könnyen adódnak a megoldások:*

$\left(x;y\right)\in \left\{\begin{array}{c}\left(2015;4029\right),\left(2019;2057\right),\left(2057;2019\right),\left(4029;2015\right),\\\left(2013;-1\right)\left(2009;1971\right), \left(1971;2009\right), \left(-1;2013\right)\end{array}\right\}$ *(2 pont )*

 **∑ 7 pont**

1. **Egy háromszög kerülete 12 m, oldalainak négyzetösszege 48 m2. Számítsa ki a háromszög területét.**

*Megoldás:*

*Jelölje a háromszög oldalainak hosszát a,b és c ( 1 pont ). Ekkor az*

$\left.\begin{array}{c}a+b+c=12\\a^{2}+b^{2}+c^{2}=48\end{array}\right\}$ *egyenletrendszert kell megoldani ( 1 pont ). Az első egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, kivonva belőle a másodikat és kettővel osztva*

$ab+bc+ca=48$ *adódik ( 1 pont ). Így* $a^{2}+b^{2}+c^{2}= ab+bc+ca, $*(1 pont) illetve*$ \left(a-b\right)^{2}+\left(b-c\right)^{2}+\left(c-a\right)^{2}=0$ *( 1 pont ), azaz a = b = c. ( 1 pont ) .*

*Az első egyenletből kapjuk, hogy a = b = c = 4 (m)( 1 pont ) , tehát a háromszög területe:*

$T=\frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}=\frac{4^{2}∙\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3} $ *(m2) ( 1 pont ).*

**∑ 8 pont**

1. **Oldja meg a valós számok halmazán a** $4^{sin^{2}x}+ 5 ∙4^{cos^{2}x}=12$ **egyenletet .**

*Megoldás:*

*Egyenletünket átírva* $4^{1-cos^{2}x}+5∙4^{cos^{2}x}=12$*( 1 pont ) , és bevezetve a* $4^{cos^{2}x}=a$ *új változót* $\frac{4}{a}+5a=12 , illetve 5a^{2}-12a+4=0$ *adódik( 1 pont ).*

 *Ennek gyökei 2 és* $\frac{2}{5}$ *( 1 pont ).*

*Mivel*$0\leq cos^{2}x\leq 1( 1 pont ) , így 1\leq 4^{cos^{2}x}\leq 4 , ezért a$$\frac{2}{5}$ *nem megoldás(1 pont).*

$4^{cos^{2}x}=2 –ből$$cos^{2}x=\frac{1}{2} \left( 1 pont \right), cosx=\frac{\sqrt{2}}{2} és cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}( 1 pont ) $ *, amiből* $x=\frac{π}{4}+k\frac{π}{2} , k\in Z$ *( 1 pont ) .*

*Könnyen meggyőződhetünk az eredmény helyességéről.*

**∑ 8 pont**

1. **Bizonyítsa be, hogy ha az *a,b,c* valós számokra fennáll az** $a+2b+3c\geq 14$ **egyenlőtlenség, akkor érvényes az** $a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq 14$ **egyenlőtlenség is. Mikor áll fenn az egyenlőség?**

*Megoldás:*

1. $a^{2}+b^{2}+c^{2}=\left(a-1+1\right)^{2}+\left(b-2+2\right)^{2}+\left(c-3+3\right)^{2}=$ *( 2 pont )*

$\left(a-1\right)^{2}+\left(b-2\right)^{2}+\left(c-3\right)^{2}+2\left(a+2b+3c-14\right)+14 $ *( 1 pont )*

*Látható, hogy az első három tag összege nemnegatív, a negyedik tag a feltétel miatt nemnegatív ( 3 pont ). Ezekből következik az állítás,*

*egyenlőség a = 1 , b = 2 , c = 3 esetén áll fenn( 2 pont ).*

**∑ 8 pont**

1. *Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:*

$a+2b+3c=1∙a+2∙b+3∙c\leq \left(\frac{1+a}{2}\right)^{2}+\left(\frac{2+b}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3+c}{2}\right)^{2}=$*( 3 pont )*

$=\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}+2\left(a+2b+3c\right)+14}{4} ( 1 pont ) , $*ahol egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha* $a=1 , b=2 , c=3 ( 1 pont ) .$ *A kapott egyenlőtlenségből*

$a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq 2\left(a+2b+3c\right)-14\geq 14$ *( 3 pont ).*

**∑ 8 pont**

*Megjegyzés: Könnyen célhoz érhetünk a vektorok skaláris szorzatának felhasználásával. Legyen* $\overline{u}\left(1;2;3\right), \overline{v}\left(a;b;c\right).Ekkor \left|\overline{u}\right|=\sqrt{14} , $

$\left|\overline{v}\right|=\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}} , \overline{u}∙ \overline{v}=a+2b+3c= \sqrt{14}∙\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}∙cosφ$ *,*

*ahol* $φ az $$\overline{u} és \overline{v}$ *vektorok által bezárt szög. Mivel* $cosφ\leq 1 , kaptuk, hogy$

*14*$14\leq a+2b+3c= \sqrt{14}∙\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}∙cosφ\leq \sqrt{14}∙\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}} , $

*Ebből* $14\leq a^{2}+b^{2}+c^{2} egyenlőség akkor teljesül, ha cosφ=1 , azaz$

$\overline{u}∥\overline{v}$ *, vagyis* $a=1 , b=2 , c=3 .$