*Az Arany János programban részt vevő iskolák matematika versenye*

*13. évfolyam*

2014

*Megoldásvázlatok, pontozás*

1. **Egy két hétig tartó matematika táborban 25 tanuló vett részt. Minden nap 8 tanuló asztaliteniszezett, körmérkőzéses rendszerben ( mindenki játszott mindenkivel egy mérkőzést). Bizonyítsa be, hogy voltak olyanok, akik legalább kétszer is megmérkőztek egymással a tábor ideje alatt.**

*Megoldás:*

*Ha mindenki mindenkivel csak egyszer játszott volna, akkor a mérkőzések száma lett volna( 2 pont ). A feladat alapján mérkőzésre került sor*

*(2 pont), tehát voltak olyanok, akik legalább kétszer játszottak egymással (2 pont).*

**∑ 6 pont**

1. **Adott 13 általános helyzetű pont az egységnyi élű szabályos tetraéder belsejében vagy a felszínén. Bizonyítsa be, hogy van közöttük négy olyan pont, amelyek által meghatározott tetraéder térfogata legfeljebb .**

*Megoldás:*

*A szabályos tetraéder térfogata (1 pont) , a súlypontja a többi csúccsal négy olyan tetraédert alkot, amelyek térfogata (1 pont). Az adott 13 pont közül 4 egy ilyen tetraéder belsejében vagy a felszínén van (2 pont), tehát az általuk meghatározott tetraéder térfogata legfeljebb (2 pont) .*

**∑ 6 pont**

1. **Bizonyítsa be, hogy ha ( *an* ) mértani sorozat, akkor és egy mértani sorozat három egymást követő tagja.**

*Megoldás:*

*Legyen az (an) sorozat első tagja a1 , hányadosa q 0 ( 1 pont ). Ekkor*

*és .*

*A (bn) sorozat valóban mértani sorozat, a sorozat hányadosa (1+q)*

*ahol q . ( q = esetén*  *lenne. )*

**∑ 7 pont**

1. **Oldja meg az egész számok halmazán az egyenletet.**

*Megoldás:*

*Azonos átalakításokkal egyenletünk egyenértékű az*

*egyenlettel.*

*( A közös nevezővel végigszorozva és rendezve:*

*) ( 3 pont )*

*.( 2 pont )*

*Ez alapján már könnyen adódnak a megoldások:*

*(2 pont )*

**∑ 7 pont**

1. **Egy háromszög kerülete 12 m, oldalainak négyzetösszege 48 m2. Számítsa ki a háromszög területét.**

*Megoldás:*

*Jelölje a háromszög oldalainak hosszát a,b és c ( 1 pont ). Ekkor az*

*egyenletrendszert kell megoldani ( 1 pont ). Az első egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, kivonva belőle a másodikat és kettővel osztva*

*adódik ( 1 pont ). Így (1 pont) illetve ( 1 pont ), azaz a = b = c. ( 1 pont ) .*

*Az első egyenletből kapjuk, hogy a = b = c = 4 (m)( 1 pont ) , tehát a háromszög területe:*

*(m2) ( 1 pont ).*

**∑ 8 pont**

1. **Oldja meg a valós számok halmazán a egyenletet .**

*Megoldás:*

*Egyenletünket átírva ( 1 pont ) , és bevezetve a új változót adódik( 1 pont ).*

*Ennek gyökei 2 és ( 1 pont ).*

*Mivel nem megoldás(1 pont).*

*, amiből ( 1 pont ) .*

*Könnyen meggyőződhetünk az eredmény helyességéről.*

**∑ 8 pont**

1. **Bizonyítsa be, hogy ha az *a,b,c* valós számokra fennáll az egyenlőtlenség, akkor érvényes az egyenlőtlenség is. Mikor áll fenn az egyenlőség?**

*Megoldás:*

1. *( 2 pont )*

*( 1 pont )*

*Látható, hogy az első három tag összege nemnegatív, a negyedik tag a feltétel miatt nemnegatív ( 3 pont ). Ezekből következik az állítás,*

*egyenlőség a = 1 , b = 2 , c = 3 esetén áll fenn( 2 pont ).*

**∑ 8 pont**

1. *Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:*

*( 3 pont )*

*ahol egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha A kapott egyenlőtlenségből*

*( 3 pont ).*

**∑ 8 pont**

*Megjegyzés: Könnyen célhoz érhetünk a vektorok skaláris szorzatának felhasználásával. Legyen*

*,*

*ahol vektorok által bezárt szög. Mivel*

*14*

*Ebből*

*, vagyis*