Megoldások

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

9. előkészítő évfolyam

1. **Egy futballmérkőzésen 2019 néző volt. A hazai csapat szurkolói kétszer annyian voltak, mint a vendégcsapat szurkolói. A hazai csapat szurkolói között 500-zal több férfi volt, mint nő. Hány női szurkolója volt a mérkőzésen a hazai csapatnak?**
 (A fiatal korúakat is a férfiak, ill. nők közé számoltuk.)

A vendégcsapatnak 2019/3=673. a hazai csapatnak $2\cdot 673=1346$ szurkolója volt. 4 p.

Ha a haza csapatnak n női szurkolója volt, akkor a férfi szurkolók száma n+500. Ezért

$$n+n+500=1346$$
$$2n=846$$
$$n=423$$

Tehát 423 női szurkolója volt a mérkőzésen a hazai csapatnak. 6 p.

Ell.:
673 vendégszurkoló, 423 hazai női szurkoló. 923 hazai férfi szurkoló összesen 2019 fő. 2 p.

Össz.: 12pont

2. **Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge négyszerese a háromszög egy másik szögének. Mekkorák ezek a szögek?**

Legyenek a háromszög szögei α, α, $180°-2\alpha$. 2 p.-

Ha az alapon fekvő szög a nagyobb, akkor $\alpha = 4(180°-2\alpha)$. Ebből $\alpha= 80°$.
A háromszög szögei 80°, 80°, 20°. 5 p

Ha a szárak által bezárt szög a nagyobb, akkor $4\alpha = 180°-2\alpha$. Ebből $\alpha= 30°$.
A háromszög szögei 30°, 30°, 120°. 5 p.

Össz.: 12 pont

3. **Az Á, O, J, N, S betűk mindegyikének egyszeri felhasználásával hány ötbetűs szó képezhető? Ha ezeket a szavakat ABC sorrendbe írjuk, akkor hányadik helyen áll a JÁNOS szó? Válaszaidat indokold!** (A képzett szavaknak nem kell értelmesnek lenni.)

Az első helyre írhatok 5 betűt, a másodikra 4-et. Ez eddig $5\cdot 4=20$ lehetőség, a harmadik helyre 3-at, a negyedikre 2-t és az ötödik helyre a megmaradt 1 betűt. Ez összesen $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ lehetőség, tehát 120 ötbetűs szó képezhető. 4 p.

Az ABC sorrendbe szedett 120 szó egy ötöde, azaz 24 szó kezdődik Á-val. A következő 24 szó J-vel kezdődik. Ezek közül az első a JÁNOS szó. Tehát az összes szó között ez a 25-ödik. 8 p.

Össz.: 12 pont

A következő két (feladatnál nem kérünk indoklást, csak a válaszokat kell megadni.

4. Hány olyan egész szám van,

a) amelynek az abszolút értéke kisebb 10-nél, ..*19*..... 1 *p.*

b) amelynek az abszolút értéke kisebb *n*-nél, ha *n* pozitív egész szám, ..*2n-1*... 5 *p.*

c) amely 1 és 100 közé esik és osztható 3-mal,. ..*33*... 1 *p.*

d) amely 1 és 100 közé esik és osztható 7-tel, ...14.... 2 *p.*

e) amely 1 és 100 közé esik és osztható 3-mal vagy 7-tel? ..43.... 5 *p.*

Össz.: 14 pont

5. Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell becsukott szemmel kivenni, hogy a kivettek között biztosan legyen

***a)* fehér vagy fekete,**	**12**	**1 p.**
***b)* fehér és fekete,**	**20**	**2 p**
***c)* 4 fehér és 5 fekete.**	**24**	**2 p.**
***d)* 5 fehér és 4 fekete.**	**23**	**2 p.**
***e)* több fehér, mint fekete,**	**24**	**2 p.**
***f)* három azonos színű, .**	**7**	**2 p.**
***g) n* azonos színű (*n* 1-nél nagyobb és 7-nél kisebb pozitív egész.)**	**3*n*-2**	**5 p.**

Össz.: 16 pont

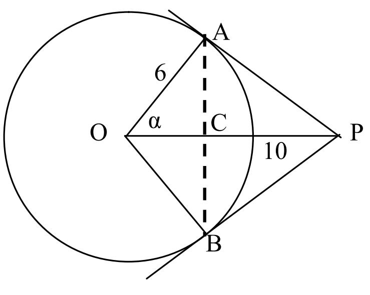
6. András és Béla újságot árultak. Hétfőn Béla 25 %-kal több újságot adott el, mint András. Kedden András ugyanannyi újságot adott el, mint hétfőn, de ez most is kevesebb volt, mint amennyit Béla adott el, pontosan 20 %-kal volt kevesebb. Hétfőn vagy kedden adott el több újságot Béla?

Legyen András ill. Béla által a két napon eladott újságok száma a_1, a_2, ill. b_1, b_2. 2 p.

Ha András hétfőn a_1 újságot adott el, akkor Béla 25 %-kal többet: b_1=1,25a_1 újságot. 4 p.
András kedden is a_1 újságot adott el, és ez a Béla által eladott újságok 80 %-a volt, tehát
$b_2 \cdot 0{,}8 = a_1$, ebből $b_2 = \frac{a_1}{0{,}8} = 1{,}25a_1$, ezért $b_1 = b_2$. 8 p.

Tehát Béla hétfőn és kedden ugyanannyi újságot adott el. 2 p.

Össz.: 16 pont



7. Egy O középpontú 6 cm sugarú körhöz az O ponttól 10 cm-re levő P pontból húzott két érintő az A és B pontokban érinti a kört. Mekkorák a PA és PB érintőszakaszok? Mekkora az OAPB négyszög területe? Mekkora az AB szakasz? Mekkora részekre osztja az AB szakasz az OP szakaszt

Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az AOP háromszögre felírhatjuk Pitagorasz tételét.
$OA^2+AP^2=OP^2, \Rightarrow AP=8$ cm. BP=AP, ezért BP=8 cm. 5 p.

Az OAPB négyszög két derékszögű háromszögből áll, ezért területe T=6 cm · 8 cm = 48 cm^2. 4 **p.**

Az OAPB négyszög deltoid, ezért a területét így is megkaphatjuk: $T=\frac{OP\cdot AB}{2}$. Ebből AB=9,6 cm.

(Másképp: Ha OC=x, CP=10-x AC=y, akkor az $x^2+y^2=6^2$, $(10-x)^2+y^2=64$ egyenletekből y=4,8) **6 p.**

OACΔ~OAPΔ, mert megegyeznek a 90°-os és az α szögben. Ezért OC:OA=OA:OP, OC:6=6:10
⇒ OC=3,6 cm, CP=6,4 cm. (Vagy fenti egyenletekből x=3,6) 3 p.

Össz.: 18 pont

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

9. évfolyam

1. A 2019. év első futballmérkőzéséről az egyik újság azt írta, hogy 2019-nél több néző volt. Egy másik újság szerint 2021-nél több néző volt. Hány néző lehetett ezen a mérkőzésen, ha két újság közül csak az egyiknek volt igaza.

Ha 2019, vagy kevesebb néző volt, akkor egyik újságnak sem lett volna igaza. 3 p.

Ha 2020 vagy 2021 néző volt, akkor az első újság igazat írt, a másik nem. 4 p.

Ha 2022, vagy több néző volt, akkor mindkét újságnak igaza lett volna. 3 p.

Tehát 2020 vagy 2021 néző lehetett a mérkőzésen. 2 p.

Össz.: 12 pont

2. **Oldjuk meg az alábbi egyenletet, és ellenőrizzük a kapott gyököt!**

$$3x-2(4-x)=\frac{x}{2}+10$$

$$3x-8+2x=\frac{x}{2}+10 \qquad 5 \text{ p.}$$

$$5x=\frac{x}{2}+18$$

$$10x=x+36$$

$$9x=36$$

$$x=4 \qquad 5 \text{ p.}$$

Ell.: $3\cdot 4-2(4-4)=\frac{4}{2}+10$ 2 p.

$$12=12$$

Össz.: 12 pont

3. ***a)*** **Egy városban a munkanélküliek száma 20%-kal csökkent, így jelenleg 600-an vannak. Hány munkanélküli volt eredetileg**?

A 600 fő az eredeti létszám 80 %-a . 2 p.

Ekkor az eredeti létszám 10 % -a 600/8=75. 2 p.

Így az eredeti létszám 750 fő. 2 p.

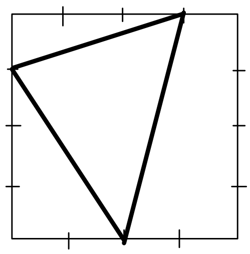
b) **Egy másik városban egy év alatt 20 %-kal nőtt, majd a következő évben 20%-kal csökkent a munkanélküliek száma. Hogyan viszonyul ekkor a munkanélküliek száma a két évvel korábbihoz? Egyenlő azzal, vagy több, esetleg kevesebb? Ha több vagy kevesebb, akkor hány százalékkal több vagy kevesebb?**

Ha a munkanélküliek eredeti száma n, akkor egy év múlva 20 %-kal több, azaz $1,2n$. 2 p.

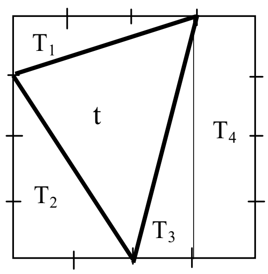
Újabb egy év múlva ennél 20 %-kal kevesebb, azaz ennek a 80 %-a: $0,8\cdot 1,2\cdot n=0,96n$.3 p.

Tehát a két év után a munkanélküliek száma 4 %-kal kevesebb, mint eredetileg volt 2 p.

Össz.: 13 pont



4. Egy 8 cm oldalú négyzet oldalait négy egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül hármat az ábra szerint összekötöttünk. Mekkora a keletkezett belső háromszög területe?



A négyzet területe $8 \cdot 8 = 64$ cm^2 2 p.
$T_1 = (2 \cdot 6)/2 = 6$ cm^2 2 p.
$T_2 = (4 \cdot 6)/2 = 12$ cm^2 2 p.
$T_3 = (2 \cdot 8)/2 = 8$ cm^2 2 p.
$T_4 = (2 \cdot 8) = 16$ cm^2 2 p.
t $= 64$ cm^2 - 6 cm^2 - 12 cm^2 - 8 cm^2 -16 cm^2 = 22 cm^2 3 p.
(T_3+T_4 trapézként is számolható.)

Össz.: 13 pont

5. Hány olyan prímszám van, amelynek nincs 6-tal osztható szomszédja?

A 2-nek és 3-nak nincs 6-tal osztható szomszédja. 2 p.

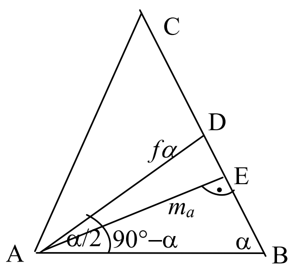
Legyen most a p 3-nál nagyobb prímszám. ekkor szomszédjai p-1 és p+1 párosak. 3 p.
p-1, p, p+1 három szomszédos szám, közülük egyik osztható 3-mal, de ez nem lehet a p. 3 p.

Ezért p-1 és, p+1 közül az egyik osztható 3-mal, mivel mindegyik páros, ezért a 3-mal osztható, 6-tal is osztható. Eszerint a 3-nál nagyobb prímek valamelyik szomszédja osztható 6-tal. 3 p.

Tehát két olyan prím van, a 2 és a 3, amelyeknek nincs 6-tal osztható szomszédja. 2 p.

Össz.: 13 pont

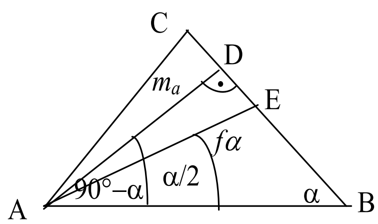
6. **Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AB. Az A csúcsból induló f_α szögfelező és m_a magasság 15°-os szöget zár be egymással. Mekkorák a háromszög szögei?**



Legyen az alapon fekvő szög α. 1 p.
I. Ha m_a van közelebb az alaphoz és DAE ∢ = 15°, akkor $\alpha/2 - (90°-\alpha) = 15°$, 3 p.

Ebből α= 70°, a háromszög szögei 70°, 70°, 40°. 3 p.

Valóban α/2= 35°, 90°-α= 20°, f_α és m_a 15°-os szöget zár be egymással. 2 p.

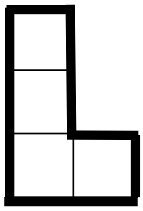


II. Ha f_α van közelebb az alaphoz és DAE ∢ = 15°, akkor $90°-\alpha - \alpha/2 = 15°$, 3 p.

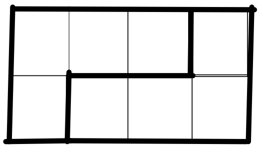
Ebből α= 50°, a háromszög szögei 50°, 50°, 80°. 3 p.

Valóban α/2= 25°, 90°-α= 40°, f_α és m_a 15°-os szöget zár be egymással. 2 p.

Össz.: 17 pont

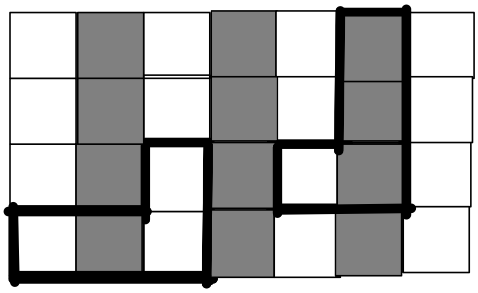


7. Van tetszőlegesen sok L alakú idomunk, amelyek négy db 1x1-es négyzetből állnak. Lefedhető-e egyrétűen, hézagmentesen ilyen L alakú idomokkal egy
***a)* 4 *x* 4 es négyzet,** ***b)* 5 *x* 5-ös négyzet,**
***c)* 7 *x* 4-es téglalap,** ***d)* 8 *x* 3-as téglalap?**
(Az L alakot lehet forgatni, tükrözni)

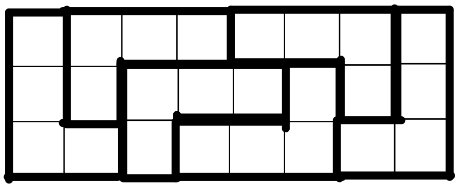


a) Egy 2 *x* 4 –est lehet, és két ilyen ad egy 4 *x* 4-est. 4 p.

b) 5 *x* 5 öst nem lehet, mert a mezők száma nem osztható 4-gyel 2 p.



c) 7 *x* 4-est nem lehet.
Színezzük sávosan, ekkor az L idomokat bárhogy tesszük fel, páratlan számú világos mezőt fednek le.
7 L idom kellene a lefedéshez, de ezek együtt páratlan számú világos mezőt fednének le, tehát nem fedhetik le a 16 világos mezőt. 8 p.



d) 8 *x* 3-ast lehet. 6 p.

Össz.: 20 pont

Megjegyzés:
Megmutatható, hogy egy *a* és *b* oldalakkal rendelkező téglalap akkor és csak akkor fedhető le, ha $a>1$, $b>1$ és $8 \mid ab$.

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

10. évfolyam

1. Egy téglalapban két oldal hosszának különbsége 2 cm, a téglalap területe 48 cm^2. Mekkora a téglalap kerülete és átlója?

Legyenek a téglalap oldalai x és x+2. Ekkor a területe $x(x+2) = 48$. 3 p.

Az $x^2 + 2x = 48$ egyenlet pozitív megoldása x=6. 3 p

Tehát a téglalap oldalai 6 cm és 8 cm, kerülete 28 cm. 2 p.

Átlója $\sqrt{(6\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2} = 10\,\text{cm}$. 3 p.

Össz.: 11 pont

2. Ha a *p* és *p*+2 számok mindegyike prím, akkor ikerprímeknek nevezzük őket. Mutassuk meg, hogy a négynél nagyobb ikerprímek közötti szám osztható 6-tal.

Ha p és p+2 is 4-nél nagyobb prímek, akkor mindegyik páratlan, ezért a köztük levő p+1 szám páros. 3 p.

p, p+1 és p+2 három szomszédos szám, ezért valamelyik osztható 3-mal. 3 p.

Mivel p és p+2 4-nél nagyobb prímek, ezért ezek nem oszthatók 3-mal, tehát p+1 osztható 3-mal. 3 p.

Ha p+1 páros és osztható 3-mal, akkor 6-tal is osztható. 2 p.

Össz.: 11 pont

3. Hozd egyszerűbb alakra, majd számológép használata nélkül állítsd növekvő sorrendbe az *x*, *y* *z* számokat!

$$x = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}, \qquad y = 8-\sqrt{3}-\sqrt{27}, \qquad z = \left(\frac{11}{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\sqrt{3}\right).$$

$$x = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3} = 4-4\sqrt{3}+3 = 7-4\sqrt{3}$$ 4 p.

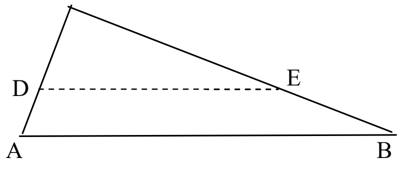
$$y = 8-\sqrt{3}-\sqrt{27} = 8-\sqrt{3}-3\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3}$$ 2 p.

$$z = \left(\frac{11}{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\sqrt{3}\right) = \frac{77}{4}-11\sqrt{3}+7\sqrt{3}-12 = 7\frac{1}{4}-4\sqrt{3}.$$ 4 p.

Látható, hogy $7 < 7\frac{1}{4} < 8$, ezért, $x < z < y$. 3 p

Össz.: 13 pont

4. Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogója 5 cm, ill. 12 cm hosszú. D és E az AC és BC befogók pontjai úgy, hogy AD:DC=BE:EC=1:2. Mekkora a DE szakasz és mekkora az ABED négyszög területe?



AB= $\sqrt{(5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2} = 13$ cm. 2 p.

Az ABC háromszög területe T=(5 cm·12 cm)/2=30 cm^2. 2 p.

AD:DC=BE:EC=1:2 miatt CDEΔ~ABCΔ, és a hasonlóság aránya k=2/3. 3 p.

Ezért DE=2/3·AB= 26/3 cm. 2 p.

A CDEΔ területe $t_{CDE\Delta} = k^2 \cdot T$ = 4/9 · 30 cm^2,

és t_{ABDE} =5/9 ·T = 5/9 · 30 cm^2 = 50/3 cm^2. 5 p. **Össz.: 14 pont**

Második megoldás a terület kiszámítására:

Az ABC háromszögben 2T=13 cm$\cdot m_c$ = 5 cm $\cdot$12 cm, $\Rightarrow$ m_c = 60/13 cm. 4 p.

AD:DC=BE:EC=1:2 miatt DE||AB, ezért ABED trapéz, és magassága m=m_c/3 =20/13 cm.

Így $t_{ABDE} = \dfrac{(AB+DE)\cdot m}{2} = \dfrac{\left(13\text{ cm} + \dfrac{26}{3}\text{ cm}\right)\cdot \dfrac{20}{13}\text{cm}}{2} = \dfrac{50}{3}\text{ cm}^2$. 5 p.

5. **Egy kalapban 2019 cédula van, az 1, 2, 3, ... 2019 számokkal. Hányat kell kihúznunk, hogy biztosan legyen köztük két olyan szám, amelyek összege osztható 5-tel?**

Ha kihúzunk egy ($5a$, $5b$) alakú számpárt, ahol $a\neq b$, vagy egy ($5k$+1, $5n$+4) alakú, vagy egy ($5k$+2, $5n$+3) alakú párt, ahol k=n is lehet, akkor ezek összege osztható lenne 5-tel. 4 p.

Ha a legtöbb számot akarjuk kihúzni úgy, hogy ezt elkerüljük, akkor kihúzhatunk egy 5-tel osztható számot, a másik két párból pedig az egyik-egyik fajtából az összest. 4 p.

Mivel mind a 4 típusból 404 db van, ezért mindegy hogy melyiket választjuk a párokból, pl. 404 db $5k$+1 alakút, és 404 db $5k$+2 alakút. E között a 809 szám között még nincs olyan pár, amelyek összege 5-tel osztható. 4 p.

Ha 810 számot húzunk ki, akkor már biztosan lesz két olyan, amelyek összege osztható 5-tel. 2 p.

Össz.: 14 pont

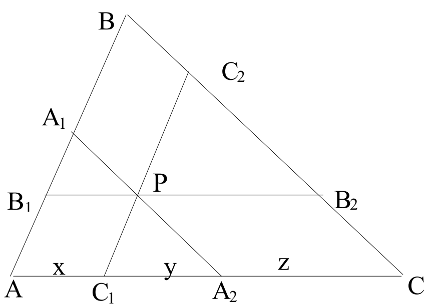
6. **Milyen p esetén lesz az $x^2 - px + 3p - 8 = 0$ egyenletnek**
   a) két különböző valós gyöke,
   b) két különböző pozitív gyöke,
   c) egy 5-nél kisebb és egy 5-nél nagyobb gyöke?

a) Két különböző valós gyök van, ha D = p^2 - 4(3p-8) >0 ebből p<4 vagy p >8. 4 p.

b) Két különböző pozitív gyök akkor és csak akkor van, ha D >0 azaz p<4 vagy p>8, x_1+x_2 =p >0, $x_1 \cdot x_2$ =3p -8 >0 azaz p > 8/3. 5 p.
Mindhárom feltétel teljesül ha 8/3<p<4 vagy p >8. 3 p.

c) Az f(x) =x^2-px+3p-8 függvény „egyenes állású”, ezért egy 5-nél kisebb és egy 5-nél nagyobb gyök akkor és csak akkor van, ha f(5) <0,
25-5p +3p- 8<0, azaz p >8,5. 5 p.

Össz.: 17 pont



7. **Az ABC háromszög belsejében levő P ponton át az ábra szerint párhuzamosokat húzunk az oldalakkal.**
Igazoljuk, hogy $\dfrac{A_1A_2}{BC} + \dfrac{B_1B_2}{AC} + \dfrac{C_1C_2}{AB} = 2$

Jelöljük x, y, z-vel az AC_1, C_1A_2 és A_2C szakaszokat! 5 p.

Az AA_1A_2 és ABC háromszögek hasonlósága miatt
A_1A_2 /BC = (x+y) / (x+y+z)

Az AC_1PB_1 és A_2CB_2P paralelogrammákban B_1P =x és PB_2=z, ezért B_1B_2/AC=(x+z)/(x+y+z).

Az CC_1C_2 és ABC háromszögek hasonlósága miatt C_1C_2 /AB = (z+y) / (x+y+z) 10 p.
A három egyenlőséget összeadva az állítást kapjuk. 5 p.

Össz.: 20 pont

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

11. évfolyam

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amely tartalmaz 3-as számjegyet?

Az összes háromjegyű számban az egyesek, tízesek, százasok helyére rendre 10, 10 és 9 jegyet írhatunk, ezért $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ háromjegyű szám van. 3 p.

A hármast nem tartalmazó háromjegyű számokban az egyesek, tízesek, százasok helyére rendre 9, 9 és 8 jegyet írhatunk, ezért $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ hármast nem tartalmazó háromjegyű szám van. 5 p.

A hármast tartalmazó háromjegyű számok száma $900 - 648 = 252$. 2 p.

Össz.: 10 pont

Második megoldás:

3AB alakú háromjegyű szám $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ db van. (A és B lehet egyforma is, és 3 is.)
A3B alakú háromjegyű szám $9 \cdot 1 \cdot 10 = 90$ db van.
AB3 alakú háromjegyű szám $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ db van. 3 p.

Vannak olyan számok, amiket többször is számoltunk, ezeket el kell vennünk:
33A alakú háromjegyű szám 10 db van.
3A3 alakú háromjegyű szám 10 db van.
A33 alakú háromjegyű szám 9 db van. 3 p.

A 333 számot háromszor beszámoltuk és háromszor elvettük, tehát ezt még hozzá kell venni. 1 p.

Így összesen $100+90+90-10-10-9+1 = 252$ 3-as számjegyet tartalmazó háromjegyű szám van. 3 p.

Össz.: 10 pont

2. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}=1$$

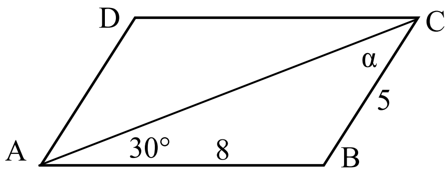
Szorozzunk be $4x^2$-1-gyel, kizárva az x=0,5 és x= -0,5 gyököket! 2 p.

$$6 + 3(2x - 1) - 2(2x+1) = 4x^2 - 1 \qquad \text{2 p.}$$
$$6+6x-3-4x-2=4x^2-1$$
$$0 = 4x^2 - 2x - 2$$
$$0 = 2x^2 - x - 1$$

Ebből $x_1 = 1$, $x_2 = -0,5$. 3 p.
x_2 nem megoldás, 1 p.
x_1-et behelyesítve. láthatjuk, hogy jó megoldás. 2 p.

Össz.: 11 pont

3. Az ABCD paralelogrammában AB=8 cm, BC=5 cm, CAB∢=30°. Mekkorák a paralelogramma szögei, és mekkora a paralelogramma területe?

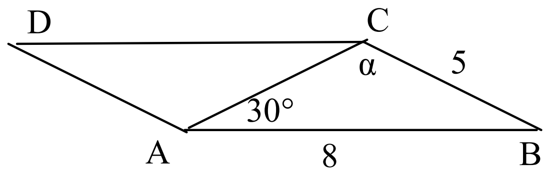


Legyen ACB∢=α, ekkor az ABC háromszögre felírhatjuk a sinus-tételt: $\frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ}=\frac{8}{5}$

Ebből $\sin\alpha = 0{,}8$. 3 p.

Ennek két olyan megoldása van, amelyek egy háromszög szögei lehetnek: $\alpha_1 = 53{,}13°$ és $\alpha_2=126{,}87°$. 2 p.

$\alpha_1 = 53{,}13°$ esetén DAB∢=BCD∢= 83,13° és ABC∢=ADC∢= 96,87°.
A paralelogramma területe: $T=5\text{ cm}\cdot 8\text{ cm}\cdot\sin 86{,}87°=39{,}71\text{ cm}^2$. 4 p.



$\alpha_2 = 126{,}87°$ esetén DAB∢=BCD∢= 156,87° és ABC∢=ADC∢= 23,13°.

A paralelogramma területe:
$T=5\text{ cm}\cdot 8\text{ cm}\cdot\sin 23{,}13°=15{,}71\text{ cm}^2$ 4 p.

Össz.: 13 pont

(*Aki csak egy megoldást talál, az max. 8 pontot kaphat.)*

4. Számológép és közelítő értékek használata nélkül határozd meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$\boldsymbol{a}= \cos^2 15° - \sin^2 15°,\qquad \boldsymbol{b} = \log_3\sqrt{2}\cdot\log_2\sqrt{3},\qquad \boldsymbol{c} = 9^{\log_3\sqrt{5}}$$

$a= \cos^2 15° - \sin^2 15° = \cos(2\cdot 15°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3 p.

$b= \log_3\sqrt{2}\cdot\log_2\sqrt{3} = \frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2 3}\cdot\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 5 p.

$c = 9^{\log_3\sqrt{5}} =\left(3^2\right)^{\log_3\sqrt{5}}=\left(3^{\log_3\sqrt{5}}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$. 5 p.

Össz.: 13 pont

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2x^2+4x-\sqrt{x^2+2x+8}=12$$

Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 16-ot:

$$2x^2+4x+16-\sqrt{x^2+2x+8}=28$$ **3** p.

ekkor $y=\sqrt{x^2+2x+8}$ helyettesítéssel: a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$2y^2 - y = 28$$ 4 p.

Ennek megoldásai: $y_1=4$ és $y_2= -3{,}5$. 2 p.

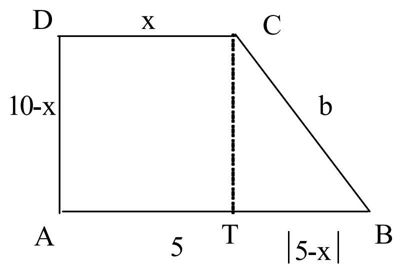
Az utóbbi nem lehet, hiszen y nem negatív, mivel x egy kifejezésének a négyzetgyöke. Tehát y=4. Ekkor x-re a következő egyenletet kapjuk:

$$4=\sqrt{x^2+2x+8}$$

Négyzetre emelve és megoldva két megoldás adódik: $x_1=2$ és $x_2= -4$. 4 p.

Mivel nem csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott gyököket ellenőrizni kell. Mindkét gyök kielégíti az egyenletet, így két megoldás van. 2 p.
(Csak akkor jár a pont, ha elvégzi az ellenőrzést.) **Össz.: 15 pont**

6. Egy derékszögű trapéz egyik alapja 5 cm, a másik alap és a derékszögű szár összege 10 cm. Mekkora lehet a trapéz területének legnagyobb értéke? Mekkora lehet a trapéz kerületének legkisebb értéke?



Ábra 4 p.

($x \geq 5$ is lehet, ezért vagy két ábra esetén, vagy TB=$|x-5|$, és x ill.10-x jelölése esetén jár a 4 pont.)

A terület $t = \frac{(5+x)(10-x)}{2}$ 1 p.

számtani mértani közép összefüggés szerint:

$$t = \frac{(5+x)(10-x)}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5+x+10-x}{2}\right)^2 = \frac{225}{8}\ \text{cm}^2$$ 4 p.

Egyenlőség akkor és csak akkor állhat, ha $5+x = 10-x$, azaz ha $x = 2,5$ cm. 2 p.

Másképp: $t = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 25 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{225}{8}$ maximuma $x = \frac{5}{2}$ cm-nél $\frac{225}{8}$ cm^2. (6 p.)

A kerület akkor a legnagyobb, ha b ill. vele együtt b^2 a legnagyobb. 2 p.

$b^2 = (10-x)^2 + (5-x)^2 = 2(x - 7.5)^2 + 12,5$ 3 p.

tehát a kerület x=7,5 cm-nél a legkisebb k=15+$\sqrt{12,5}$ ≈18,54 cm 2 p.

18 pont

7. Egy téglalap oldalainak mértékszámai 5-nél nagyobb természetes számok. A terület és a kerület mértékszámainak összege 2019. Mekkorák a téglalap oldalai?

Legyenek az oldalak k és n. Ekkor a feltételek szerint:

$kn + 2k + 2n = 2019$ /+4 5 p

$kn + 2k + 2n + 4 = 2023$

$(k+2)(n+2) = 7 \cdot 17^2$ 6 p.

$k+2$ és $n+2$ 7-nél nagyobb egészek, ezért $(k+2)(n+2)$ csak úgy lehet $7 \cdot 17^2$, ha $k+2=17$ és $n+2=119$, vagy $n+2=17$ és $k+2=119$. 5 p.

Mindkét esetben a téglalap oldalai 15 és 117 egység. 2 p.

Valóban ekkor a kerület 2(15+117)=264, a terület 15·117=1755, ezek összege 2019. 2 p.

Össz.: 20 pont

Második megoldás a $kn + 2k + 2n = 2019$ egyenlet megoldására

$k(n+2) = 2019 - 2n$, ebből $k = \frac{2019-2n}{n+2} = \frac{2023-2n-4}{n+2} = \frac{2023}{n+2} - 2$ 5 p.

k csak úgy lehet természetes szám, ha $n+2$ 2023-nak pozitív osztója.

2023 pozitív osztói, azaz n+2 lehet:	1,	7,	17,	119,	289,	2023.
Ekkor n	-1,	5,	15,	117,	287,	2021.
Ezekhez tartozó k	2021,	287,	117,	15	5,	-1

A feladat feltételeinek csak a (15, 117) ill. (117, 15) pár felel meg. 6 p.

Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2019.

12. évfolyam

1. Amikor még volt a forintnak váltópénze, (1 Ft = 100 fillér,) akkor egy lovas a lovát úgy hirdette eladásra, hogy csak a patkószegekért kell fizetni. Az első szegért 1 fillért, a másodikért 2 fillért, és így tovább, minden következőért kétszer annyit, mint az előzőért, és tudjuk, hogy minden patkóhoz 6 szeg tartozik

Melyik a több, az utolsó szeg ára, vagy az előtte levő 3 szeg együttes ára?
100 Ft-ra kerekítve add meg, hogy mennyit kellett volna fizetni a lóért?

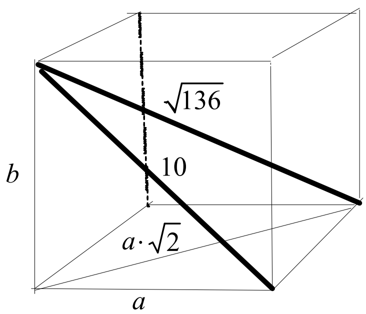
Az n-edik szegért 2^{n-1} fillért kell fizetni. 24 szeg van, ezért az utolsó szeg 2^{23} fillérbe kerül. 3 p.

Az előtte levő három szeg ára $2^{20}+2^{21}+2^{22}=2^{20}(1+2+4)=7\cdot 2^{20}$ fillér.
Mivel $2^{23}=8\cdot 2^{20}$, ezért az utolsó szög ára több mint az előző háromé együtt. 4 p.
(Ez a 5 pont akkor is jár, ha konkrétan kiszámolja az érékeket.)

A ló ára $1+2+4+\ldots+2^{23}$ fillér = 2^{24}-1 fillér = 16 777 215 fillér = 167 772,15 Ft,
száz Ft-ra kerekítve 167 800 Ft. 4 p.

Össz.: 11 pont

2 Egy négyzet alapú egyenes hasáb (négyzetes oszlop) egy oldallapjának átlója 10 egység, a testátlója $\sqrt{136}$ egység. Mekkora a hasáb térfogata?



Ábra 3 p.
Az ábra szerinti háromszögekben:
$a^2+b^2=100$
$\mathbf{2}a^2+b^2=136.$ 3 p.

Ebből $a^2=36$, $b=8$. 3 p.
V$=a^2b=288$. 3 p.

Össz.: 12 pont

3. Az 1, 2, 4, 5, 9 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával képezzük az összes lehetséges ötjegyű számot, majd ezek közül véletlenszerűen válasszunk ki egyet.
***a)* Mennyi a valószínűsége, hogy a választott szám osztható 12-vel?**
***b)* Mutassuk meg, hogy a képzett számok egyike sem négyzetszám.**

a). 12-vel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha osztható 3-mal és 4-gyel.
A szánjegyek összege 21, ezért az összes szám osztható 3-mal. 2 p.

4-gyel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha az utolsó két jegyből álló szám osztható 4-gyel. A fenti számjegyekből képezhető kétjegyű számok közül a 12, 52, 92 és a 24 osztható 4-gyel. 2 p.

Mindegyik elé a megmaradt 3 számból hatféleképp írhatunk jegyeket, ezért $4\cdot 6=24$ 12-vel osztható szám lesz. 2 p.

Összesen 5!=120 szám képezhető.

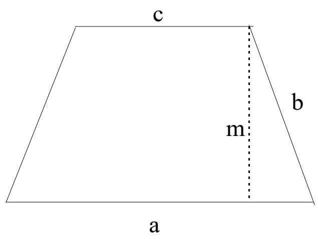
Így annak a valószínűsége, hogy a választott szám osztható 12-vel: $p=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$. 2 p.

b) Ha egy négyzetszám osztható egy p prímszámmal, akkor osztható p^2-tel is. 2 p.

A szánjegyek összege 21, ezért az összes szám osztható 3-mal, de egy sem osztható 9-cel, ezért képzett számok között nincs négyzetszám. 4 p.

Össz.: 14 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus trapézban a szár az alapok számtani közepe, akkor a magasság az alapok mértani közepe!



Az ábra derékszögű háromszögére m = $\sqrt{b^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}$

A feltétel szerint b = $\frac{a+c}{2}$. Ezt beírva:

$$m=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}=\sqrt{ac}$$

Össz.: 14 pont

5. *a)* Mennyi $2^x + 2^{-x}$ értéke, ha *x* olyan valós szám, amelyre $4^x + 4^{-x}=23$.

***b)* Határozzuk meg lg *x* - lg *y* értékét, ha *x* és *y* olyan pozitív számok, amelyekre**

$$\mathbf{20x^2 - y^2 + 8xy = 0\ !}$$

a) Legyen $a=2^x+2^{-x}$, ekkor $a^2=(2^x+2^{-x})^2 = 4^x+4^{-x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x} = 23+2 = 25$. 4 p.
Mivel 2^x és 2^{-x} minden x-re pozitív, ezért a is pozitív, tehát $a= 5$. 2 p.

(Aki megoldja a $4^x + 4^{-x}=23$ egyenletet, és a kapott közelítő értékekkel számolja ki 2^x+2^{-x} értékét, az max 4 pontot kaphat.)

b) Mivel $x, y>0$, így lg x - lg y mindig értelmezve van.

Tudjuk, hogy $\lg x-\lg y=\lg\frac{x}{y}$, így $\frac{x}{y}$ értékét kell meghatározni. 2 p.

Mivel $y > 0$, így a feltételi egyenletet eloszthatjuk y^2-tel:

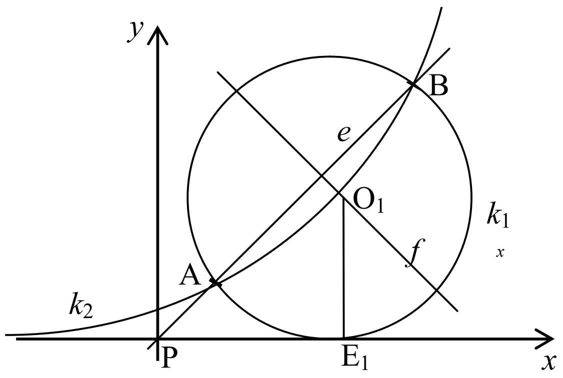
$$20\frac{x^2}{y^2}+8\frac{x}{y}-1=0$$ 2 p.

Ez $\frac{x}{y}$-ra másodfokú egyenlet, amelynek két gyöke $\frac{x}{y}=\frac{1}{10}$ illetve $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$. Mivel x, y pozitív számok, így csak az előbbi lehet.

Ekkor pedig $\lg x-\lg y=\lg\frac{x}{y}=\lg\frac{1}{10}=-1$ 4 p.

Össz.: 14 pont

6. Koordináta-rendszerben adottak az A(2;2) és B(9;9) pontok. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és B pontokra és érinti az *x* tengelyt!



Első megoldás: *(Paraméteres megoldás)*
Legyen a keresett kör középpontja O(u; v)
Mivel „felülről” érinti az x tengelyt, ezért
a kör sugara v, egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$.
5 p.

O illeszkedik AB felező merőlegesére, f-re:
f: $x+y=11$, így $u+v=11$, ebből $u=11-v$.
4 p.

A(2;2) illeszkedik a körre: $(2-u)^2+(2-v)^2=v^2$.
u-t beírva $(2-(11-v))^2+(2-v)^2=v^2$. 4 p.

Ebből $v_1 = 5$ és $v_2=17$. Ezekhez $u_1=6$, $u_2=-6$.
Két kör kapunk, amelyek egyenlete $(x-6)^2 +(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2 +(y-17)^2=289$. 4 p.

Össz.: 17 pont

Második megoldás (*A szerkesztés menetét követve*)

Az AB egyenes a P(0;0) pontban metszi az x tengelyt A P pontból a körhöz húzott érintőszakasz mértani közepe a pontból húzott szelő két darabjának PA-nak és PB-nek:

$$\text{PE} = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2}} = 6\,.$$ 8 p.

Az előző megoldásnál adódott, hogy két megoldás lesz, itt tudnunk kell előre, hogy két megoldás lesz, ezért P-ből mindkét irányba fel kell mérnünk az x tengelyre a PE=6 hosszúságú szakaszt, így kapjuk a két érintési pontot: $E_1(6;0)$ és $E_2(-6;0)$. 4 p.

A két középpont második koordinátáit itt f: $x+y=11$ egyenletből kaphatjuk $v_1 = 5$ és $v_2=17$.
Két kör egyenlete most is $(x-6)^2 +(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2 +(y-17)^2=289$. 5 p.

Össz.: 17 pont

Harmadik megoldás (*mértani helyekkel)*

Az A(2;2) pontra illeszkedő és x tengelyt érintő körök középpontjai egyenlő távolságra vannak A-tól és az x tengelytől, ezért ezek mértani helye az A fókuszú, x tengely vezéregyenesű parabola, amelynek egyenlete $y = \frac{1}{4}(x-2)^2+1$. 6 p.

Ugyanígy a B(9;9) pontra illeszkedő és x tengelyt érintő körök középpontjainak mértani helye az $y = \frac{1}{18}(x-9)^2+4{,}5$ parabola. 4 p.

A két parabola metszéspontjai lesznek a keresett középpontok $O_1(6;5)$ és $O_2(-6;17)$.
Két kör egyenlete most is $(x-6)^2 +(y-5)^2=25$ és $(x+6)^2 +(y-17)^2=289$. 7 p.

Össz.: 17 pont

7. Írjuk fel a páratlan pozitív egész számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen, mint az előzőben!

1,
3, 5,
7, 9, 11,
13, 15, 17,, 19,
21, 23, 25, 27, 29,
…

a) **Ha folytatjuk a táblázatot, akkor milyen szám áll a 30-adik sor elején?**
b) **Mennyi a számok összege a 30. sorban?**
c) **Hányadik sorban, és hányadik helyen szerepel a 2019?**

a) Vizsgáljuk először az első 29 sort. Ezekben rendre 1, 2, 3, … 28, 29 páratlan szám szerepel. tehát a 29-edik sor végén az (1+2+3+…+28+29)-edik páratlan szám szerepel.

3 p.

1+2+…+28+29 $=\dfrac{(1+29)\cdot 29}{2}$ =435. Tehát a 29-edik sor végén a 435-ödik, a 30-adik sor elején a 436-odik páratlan szám szerepel.

Az n-edik pártalan szám a $2n$-1, tehát a 436-odik pártalan szám a $2\cdot436-1=871$.
Ezért a 30-adik sor elején a 871 áll. 3 p.

b) A 30 sor számai: 871, 871+2, 871+2·2, … , 871+29·2, azaz 871, 873, …, 929.

Ezek összege 871 + 873 + …+ 929 $=\dfrac{(871+929)\cdot 30}{2}$ =27 000 =(30^3). 4 p.

b) Az első n-1 sorban 1+2+…+n-1 = $\dfrac{(n-1)(1+(n-1))}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$ szám szerepel, tehát az n-edik sor elején az $\left(\dfrac{n^2-n}{2}+1\right)$-edik páratlan szám, azaz $2\cdot\left(\dfrac{n^2-n}{2}+1\right)-1=n^2-n+1$ szerepel.

Az a kérdés, hogy melyik a legnagyobb olyan n, amelyre még $n^2-n+1 \leq 2019$?

Néhány próbálgatás, vagy az egyenlőtlenség megoldása után látható, hogy a legnagyobb ilyen n^2-n+1 alakú szám a $45^2-45+1=1981$.

Tehát a 45-ödik sor elején az 1981 áll. Innen még (2019-1981)/2= 19 lépéssel jutunk el a 2019-hez. Tehát a **2019 a 45-ödik sor 20-adik helyén áll**. 8 p.

Össz.: 18 pont

(Aki bebizonyítja, hogy az n-edik sorban a számok összege

$$\left(n^2-n+1\right)+\left(n^2-n+3\right)+...+\left(n^2+n-1\right)=\frac{\left[\left(n^2-n+1\right)+\left(n^2+n-1\right)\right]\cdot n}{2}=n^3$$

az, kapjon +4 pontot. aki csak megállapítja, de nem bizonyítja, kapjon +2 pontot.)