

**Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2021.**  
**Megoldások**

**9. előkészítő évfolyam**

1. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 11. A szám hattal nagyobb második jegyének négyszeresénél. Melyik ez a szám?

Legyen a kétjegyű szám  $\overline{ab} = 10a + b$ . Ekkor  $10a + b = 4b + 6$ ,  $\Leftrightarrow 10a = 3b + 6$ . 4 p.

A  $\begin{cases} 10a = 3b + 6 \\ a + b = 11 \end{cases}$  egyenletrendszer megoldása  $a = 3$ ,  $b = 8$ . 4 p.

Tehát a kétjegyű szám 38 1 p.

Ell.: Valóban  $38 = 4 \cdot 8 + 6$ , és a jegyek összege is 11. 2 p.

Az egyenletrendszer megoldása helyett:

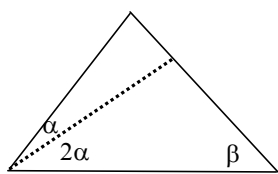
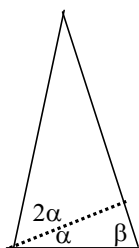
$10a = 3b + 6$  jobb oldalának is oszthatónak kell lenni 10-zel, ezért  $b$  olyan számjegy, amelyre  $3b$  4-re végződik. 3 p.

Ez csak  $b = 8$  esetén teljesül. Ekkor a keresett szám 38. 2 p.

**Össz.: 10 pont**

(Ha végig megnézi a lehetséges második jegyeket 0-tól 9-ig, és indokolja, hogy miért csak a 8 a megfelelő, akkor is teljes pontszámot kaphat.)

2. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AB, Az A csúcsból húzott magasság  $\alpha$  és  $2\alpha$  nagyságú részekre osztja az A csúcsnál levő szöget. Mekkora a háromszög szögei?



Ha  $\alpha$  van az alapon, akkor

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ és } \beta = 3\alpha.$$

Ebből  $\alpha = 22,5^\circ$ ,  $\beta = 67,5^\circ$ , a háromszög szögei:  $67,5^\circ$ ,  $67,5^\circ$ ,  $45^\circ$ .

7 p.

Ha  $2\alpha$  van az alapon, akkor  $2\alpha + \beta = 90^\circ$  és  $\beta = 3\alpha$ .

Ebből  $\alpha = 18^\circ$ ,  $\beta = 54^\circ$ , a háromszög szögei:  $54^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $72^\circ$ .

5 p.

**Össz.: 12 pont**

3. Jóska édesapja jutalmat kapott. 1/3 részét félretette nyaralásra, 1/4 részét takarékbba tette, 1/5 részén könyvet vett. Ezután maradt még 26 000 Ft-ja. Mennyi jutalmat kapott?

**I. megoldás**

Számoljunk a fizetés 60-ad részeiben. 2 p.

Félretett  $20/60$ , takarékbba  $15/60$ , és könyvre kiadott  $12/60$  részt. 3 p.

Tehát megmaradt  $[60 - (20 + 15 + 12)] / 60 = 13/60$  rész. 3 p.

Ha ez 26 000 Ft, akkor az  $1/60$  rész 2000 Ft, tehát a teljes jutalom 120 000 Ft. 4 p.

Ell.:

Valóban, ha ebből elköltött  $40\,000 + 30\,000 + 24\,000$  forintot, akkor 26 000 Ft marad. 2 p.

**Össz.: 14 pont**

## II. megoldás

Ha a jutalom  $x$ , akkor

$$x - \left( \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} \right) = 26000 \quad / \cdot 60 \quad 6 \text{ p.}$$

$$60x - (20x + 15x + 12x) = 1\,560\,000$$

$$13x = 1\,560\,000$$

$$x = 120\,000$$

5 p.

Tehát a jutalom 120 000 Ft.

1 p.

Valóban,  $120\,000 \text{ Ft} - (40\,000 \text{ Ft} + 30\,000 \text{ Ft} + 24\,000 \text{ Ft}) = 26\,000 \text{ Ft}$  2 p.

4. **Hány négyjegyű számot készíthetünk az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával, ha a felírt számokban nem lehet két azonos számjegy? Hány lesz ezek közül 12-vel osztható?**

Az egyes helyekre rendre 5, 4, 3, 2 számjegyet választhatunk, azaz összesen  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$  négyjegyű számot készíthetünk. 4 p.

Ezek közül egy szám akkor és csak akkor lesz 12-vel osztható, ha osztható 3-mal és 4-gyel, azaz ha a jegyek összege osztható 3-mal és a két utolsó jegyből álló szám osztható 4-gyel. 4 p.

Csak az 1, 2, 4, 5 jegyeket tartalmazó négyjegyű számok esetén lesz a jegyek összege 3-mal osztható. Ez összesen  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  szám. 3 p.

Az 1, 2, 4, 5 jegyekből három olyan kétjegyű szám képezhető, amelyik osztható 4-gyel: 12, 24, 52. Mindegyiknél az előtte álló jegyeket  $2 \cdot 1 = 2$  féleképp választhatjuk, tehát  $3 \cdot 2 = 6$  szám lesz 12-vel osztható. 4 p.

**Össz.: 14 pont**

5. **Egy számítógép kinyomtatta sorban a pozitív egész számokat 1-től 2021-ig. Hány számjegyet nyomtatott a gép? Milyen számjegy áll a 2021. helyen?**

Egyjegyű szám van 1-től 9-ig 9, ez összesen 9 számjegy 1 p.

Kétjegyű szám van 10-től 99-ig 90, ez összesen 180 számjegy 1 p.

Háromjegyű szám van 100-tól 999-ig 900, ez összesen 2700 számjegy 1 p.

Négyjegyű szám van 1000-től 2021-ig 1022 ez összesen 4088 számjegy 2 p.

Tehát 2021-ig összesen  $9 + 180 + 2700 + 4088 = 6977$  számjegyet nyomtattunk. 3 p.

A 2021. számjegy láthatóan a háromjegyű számok között a  $2021 - 180 - 9 = 1832$ -edik. 3 p.

$1832 = 610 \cdot 3 + 2$ , tehát a 2021-adik számjegy a 611-edik háromjegyű szám második számjegye. 3 p.

A 611-edik háromjegyű szám a 710, tehát a 2021-adiknak nyomtatott számjegy 1. 2 p.

**Össz.: 16 pont**

6. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Ha a dobozban egy piros golyóval kevesebb lenne, a golyók hetedrésze lenne piros. Ha két kék golyót egy pirosra cserélnénk, akkor a golyók ötödrésze lenne piros. Hány kék és piros golyó van a dobozban?

|          | piros: | kék:  | összes    | összefüggés:              |      |
|----------|--------|-------|-----------|---------------------------|------|
| Most     | $p$    | $k$   | $p+k$     |                           |      |
| I. eset  | $p-1$  | $k$   | $p-1+k$   | $p-1 = \frac{p-1+k}{7}$   | 3 p. |
| II. eset | $p+1$  | $k-2$ | $p+1+k-2$ | $p+1 = \frac{p+1+k-2}{5}$ | 3 p. |

Beszorzás után:  $7p-7=p-1+k$  ill.  $5p+5=p+k-1$ .

Ezekből:  $6p-6=k$ , ill.  $4p+6=k$ .

$6p-6=4p+6 \Rightarrow p=6, k=30$ .

Tehát 6 piros és 30 kék golyó van a dobozban.

Ell: 5 piros valóban a 35 golyó hetede, és 7 piros valóban a 35 golyó ötöde.

Össz.: 17 pont

7. Hány fokos szöget zár be az óra kis- és nagymutatója 4 óra 10 perckor? Ez után az időpont után mennyi idővel fogja először egymást fedni a kis- és nagymutató

4 órakor a két mutató  $120^\circ$ -os szöget zár be. 1 p.

1 perc alatt a nagymutató  $6^\circ$ -ot halad, 10 perc alatt  $60^\circ$ -ot. 2 p.

1 perc alatt a kismutató  $0,5^\circ$ -ot halad, 10 perc alatt  $5^\circ$ -ot. 2 p.

Ezért 4 óra 10 perckor  $120^\circ-60^\circ+5^\circ=65^\circ$ -os szöget zár be egymással. 2 p.

$x$  perc alatt a nagymutató  $6x$  fokot halad, a kismutató  $\frac{x}{2}$  fokot. 3 p.

Akkor fedik, egymást először a mutatók ha  $6x - \frac{x}{2} = 65$ . 3 p.

Ebből  $x = \frac{130}{11} = 11\frac{9}{11} \approx 11,82$  perc. 3 p.

Tehát  $11\frac{9}{11} \approx 11,82$  perc múlva fogj fedni egymást a két mutató. 1 p.

Össz.: 17 pont

## 9. évfolyam

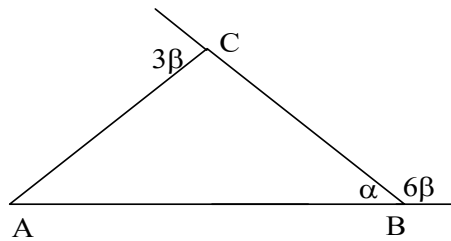
### 1. Döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások.

[  $a \mid b$  jelöli, hogy  $a$  osztója  $b$ -nek,  $(a;b)$  pedig  $a$  és  $b$  legnagyobb közös osztóját jelöli. ]

- |                                                                      |      |
|----------------------------------------------------------------------|------|
| a) Igaz-e, hogy ha $4 \mid n$ és $10 \mid n$ , akkor $40 \mid n$ ?   | NEM  |
| b). Igaz-e, hogy ha $4 \mid n$ és $9 \mid n$ , akkor $36 \mid n$ ?   | IGEN |
| c) Igaz-e, hogy ha $4 \mid m$ és $10 \mid n$ , akkor $40 \mid mn$ ?  | IGEN |
| d) Igaz-e, hogy ha $a \mid c$ és $b \mid c$ , akkor $(a;b) \mid c$ ! | IGEN |
| e) Igaz-e, hogy ha $k \mid a$ , és $n \mid b$ akkor $kn \mid ab$ !   | IGEN |
| f) Igaz-e, hogy ha $k \mid a$ , és $n \mid a$ akkor $kn \mid a$ ?    | NEM  |

Minden jó válasz 2 p. rossz válasz 0 p.

**Össz.: 12 pont**



### 2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC=BC$ . Az ábra szerint beírtuk egy belső és két külső szögét. Mekkora az $\alpha$ szög?

$AC=BC$ , ezért  $\angle BAC = \alpha$  2 p.

$3\beta$  a háromszög külső szöge, ezért egyenlő a nem mellette levő belső szögek összegével:  $3\beta = 2\alpha$ . 3 p.

A B csúcsnál levő belső és külső szög összege  $180^\circ$ , azaz  $\alpha + 6\beta = 180^\circ$  2 p.

A  $3\beta = 2\alpha$ ,  $\alpha + 6\beta = 180^\circ$  egyenletrendszer megoldása  $\alpha = 36^\circ$ ,  $\beta = 24^\circ$ . 3 p.

Tehát az  $\alpha$  szög  $36^\circ$ . 1 p.

Ell:  $36^\circ$  külső szöge  $144^\circ = 6 \cdot 24^\circ$ ,  $\angle ACB = 108^\circ$ , külső szöge  $72^\circ = 3 \cdot 24^\circ$ . 2 p.

**Össz.: 13 pont**

### 3. Gondoltam egy számot. Elvettem belőle 20-at, a különbséget elosztottam 4-gyel, a hányadoshoz hozzáadtam 30-at, az összeget megszoroztam kettővel, és így 100-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

#### 1. megoldás

Érdemes visszafelé haladni. 1 p.

Az utolsó szám 100. 2 p.

A kettővel szorzás előtt volt 50. 2 p.

A 30 hozzáadása előtt volt 20. 2 p.

A négyzel osztás előtt volt 80. 2 p.

A húsz kivonása előtt volt 100. 2 p.

Tehát 100-ra gondoltam. 1 p.

Valóban:  $\left( \frac{100 - 20}{4} + 30 \right) \cdot 2 = 100$  2 p.

(Vajon 100 helyett más gondolt számnál is ugyanahhoz jutunk vissza?)

**Össz.: 14 pont**

## 2. megoldás

Ha a gondolt szám  $x$ , akkor

$$\left(\frac{x-20}{4} + 30\right) \cdot 2 = 100$$

6 p

$$\frac{x-20}{4} + 30 = 50$$

$$\frac{x-20}{4} = 20$$

$$x-20 = 80$$

$$x = 100.$$

Ellenőrzés:

6 p.

2 p.

**Össz.: 14 pont**

4. Oldd meg a következő egyenletet, ill. egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. Az egyenlet megoldását ellenőrizd.

$$a) \quad (3x-5)(3x+5) - (3x+2)^2 + 6(2x+5) = 2x-5 \qquad b) \quad 3(0,5x-1) - \frac{5x}{2} > 4$$

$$a) \quad (3x-5)(3x+5) - (3x+2)^2 + 6(2x+5) = 2x-5$$

$$9x^2 - 25 - 9x^2 - 12x - 4 + 12x + 30 = 2x - 5$$

$$6 = 2x$$

$$x = 3$$

3 p.

3 p.

$$\text{Ell. } 4 \cdot 14 - 11^2 + 6 \cdot 11 = 6 - 5$$

$$1 = 1$$

1 p.

$$b) \quad 3(0,5x-1) - \frac{5x}{2} > 4 \quad / \cdot 2$$

$$3(x-2) - 5x > 8$$

$$3x - 6 - 5x > 8$$

$$-2x > 14$$

$$x < -7$$

2 p.

2 p.

1 p.

2 p.

**Össz.: 14 pont**

5. Határozzuk meg a  $\overline{22X24Y}$  hatjegyű számban az  $X$  és  $Y$  számjegyeket, ha a hatjegyű szám osztható 72-vel.

$$72 = 8 \cdot 9, (8:9)=1, \text{ ezért } 72 \mid n \Leftrightarrow 8 \mid n \text{ és } 9 \mid n.$$

4 p.

Egy szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három jegyéből álló szám osztható 8-cal.

$$8 \mid \overline{24Y} \Rightarrow Y = 0 \text{ vagy } Y = 8.$$

3 p.

Egy szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha jegyeinek összege osztható 9-cel.

2 p.

$$9 \mid \overline{22X240} \text{ ha } X = 8.$$

1 p.

$$9 \mid \overline{22X248} \text{ ha } X = 0, \text{ vagy } X = 9.$$

2 p.

Tehát három megfelelő 72-vel osztható szám van: 228240, 220248, 229248.

1 p.

**Össz.: 14 pont**

6. Tavaly havonta 70 000 Ft-ot költöttünk élelmiszerre és háztartási energiára. Az idén az élelmiszerek ára átlagosan 12 %-kal, az energia ára 8 %-kal nőtt, így ezekre összesen havonta 77 600 Ft-ot költünk. Mennyi ebből tavaly és idén az élelmiszer ára?

Legyen az élelmiszerre tavaly költött összeg  $x$ , az energiára költött 70 000 - $x$ . 3 p.

Ekkor az idén ezek értéke  $1,12x$  és  $1,08(70\,000-x)$  3 p.

$$1,12x + 1,08(70\,000-x) = 77\,600 \quad 3 \text{ p.}$$

$$0,04x + 75\,600 = 77\,600$$

$$0,04x = 2\,000$$

$$x = 50\,000$$

4 p.

Tehát tavaly 50 000 Ft-ot, az idén  $1,12 \cdot 50\,000 = 56\,000$  Ft-ot költöttünk élelmiszerre. 2 p.

**Össz.: 15 pont**

7. Az 1, 2, 3, 4, 7 számjegyekből hány háromjegyű szám képezhető, ha azokban minden jegy különböző? Mennyi ezeknek a háromjegyű számoknak az összege? Az 1, 2, 3, 4, 7 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám képezhető, amelyben páros és páratlan számjegy is van, ha egy jegy többször is szerepelhet?

Az egyes helyiértékekre rendre 5, 4, 3 számjegy választható, tehát  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  háromjegyű szám képezhető. 4 p.

123

124

...

+743

?

Minden helyiértéken mindegyik számjegy ugyanannyiszor, 12-szer szerepel, tehát az egy oszlopban levő számok összege  $12 \cdot (1+2+3+4+7) = 204$ . 3 p.

Így a 60 háromjegyű szám összege  $(100+10+1) \cdot 204 = 22\,644$  3 p.

A négyjegyű, csak páros számjegyeket tartalmazó számok száma  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ . 2 p.

A csak páratlan számjegyeket tartalmazó számok száma  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ . 2 p.

Az összes képezhető négyjegyű számok száma  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$  2 p.

Tehát a páros és pártalan jegyeket is tartalmazó négyjegyű számok száma

$$625 - 16 - 81 = 528.$$

2 p.

**Össz.: 18 pont**

# Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2021.

## 10. évfolyam

1. Egy kereskedő nyár végén 12%-kal leszállította a strandpapucsok árát. Miután így sem vitte őket senki, további 10%-kal csökkentette az árat. Semmi. Végso kétségbeesésében még 50%-os engedményt adott az árból. A papucsokat vitték, mint a cukrot, mégpedig 2376 Ft-os áron. Mennyibe került eredetileg egy pár papucs?

Ha az eredeti ár  $x$  Ft volt, akkor a leárazások után sorban

$$0,88x, \quad 0,9 \cdot 0,88x = 0,792x, \quad 0,5 \cdot 0,9 \cdot 0,88x = 0,396x. \quad 6 \text{ p.}$$

Ez utóbbi  $0,396x=2376$ , ebből  $x = 6000$ . 3 p.

Tehát a papucs eredeti ára 6000 Ft volt. 1 p.

Ell.: A 6000 Ft-os eredeti árból az egyes leárazások után rendre az ár  
 $6000 \text{ Ft} \cdot 0,88 = 5280 \text{ Ft}$ ,  $5280 \text{ Ft} \cdot 0,9 = 4752 \text{ Ft}$ ,  $4752 \text{ Ft} \cdot 0,5 = 2376 \text{ Ft}$ . 2 p.

**Össz.: 12 pont**

### Második megoldás:

Ha az utolsó, 50 %-os leárazás után az ár 2376 Ft lett, akkor előtte  
 $2 \cdot 2376 \text{ Ft} = 4752 \text{ Ft}$  volt. 3 p.

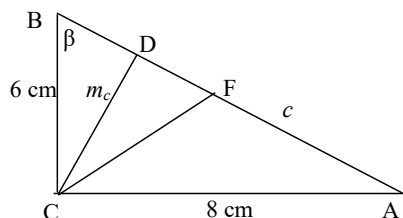
A második, 10 %-os leárazás után 4752 Ft volt az ár, akkor ez a megelőzőnek  
 90 %-a, tehát az előző ár  $\frac{4752 \text{ Ft}}{90} \cdot 100 = 5280 \text{ Ft}$  volt. 5 p.

Az első, 12 %-os leárazás után 5280 Ft volt az ár, akkor ez az eredetinek  
 88 %-a, tehát az eredeti ár  $\frac{5280 \text{ Ft}}{88} \cdot 100 = 6000 \text{ Ft}$  volt. 5 p.

**Össz.: 12 pont**

(Itt az ellenőrzés a végzett lépések ismétlése lenne, ezért nem várjuk el.)

2. Az ABC derékszögű háromszög két befogója  $BC=6 \text{ cm}$  és  $AC=8 \text{ cm}$ . Milyen hosszúságú az átfogóhoz tartozó  $CD$  magasság és a  $CF$  súlyvonal? Mekkora a  $DFC$  háromszög területe?



Az AB átfogó  $c = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2} = 10 \text{ cm}$ . 2 p.

A háromszög területe  $T = \frac{6 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot m_c}{2}$ , ebből  
 $m_c = 4,8 \text{ cm}$ . 5 p.

$FC$  a háromszög köré írt kör sugara, ezért  $FC=FA=FB=5 \text{ cm}$ . 2 p.

$DF = \sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (4,8 \text{ cm})^2} = 1,4 \text{ cm}$ . 2 p.

$$T_{DFC\Delta} = \frac{DF \cdot m_c}{2} = \frac{1,4 \text{ cm} \cdot 4,8 \text{ cm}}{2} = 3,36 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ p.}$$

**Össz.: 13 pont**

### Második megoldás $m_c$ kiszámításra.

$BDCA \sim ABCA$ , mert megegyeznek két szögben ( $90^\circ$  és  $\beta$ ).

Ezért  $m_c : 6 \text{ cm} = 8 \text{ cm} : 10 \text{ cm} \Rightarrow m_c = 4,8 \text{ cm}$  5 p.

3. Határozzuk meg azokat a legnagyobb  $k$ ,  $l$ ,  $m$  kitevőket, amelyekre a következő tört értéke egész!

$$t = \frac{30!}{3^k \cdot 5^l \cdot 7^m}$$

Az a kérdés, hogy az  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30$  szorzat törzstényezősz felbontásában hány 3-as, 5-ös, és 7-es szerepel. 3 p.

A hetesek számát a legkönnyebb megmondani, 30-ig négy 7-tel osztható szám van, mindegyik prímtényezői között egy 7-es van, tehát  $m=4$  az a legnagyobb kitevő, amelyre a tört még egész lehet. 3 p.

A hat 5-tel osztható számban viszont már nem hat 5-ös tényező szerepel, mert a 25 felbontásában két 5-ös tényező van, így  $l=7$ . 3 p.

A tíz hárommal osztható szám közül a 9-ben és a 18-ban két hármas, a 27-ben három 3-as prímtényező van. Ezért 30!-ban összesen 14 hármas tényező van, ezért  $k=14$ . 4 p.

**Össz.: 13 pont**

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{4}{9x^2 - 4} + \frac{10}{3x + 2} - \frac{1}{3x - 2} = 2$$

Értelmezési tartomány:  $R \setminus \{2/3, -2/3\}$  2 p.

$(3x+2)(3x-2)=9x^2-4$  –gyel szorozva mindkét oldalt: (\*)

$$4 + 10(3x-2) - (3x+2) = 18x^2 - 8 \quad 3 \text{ p.}$$

$$27x - 18 = 18x^2 - 8$$

$$0 = 18x^2 - 27x + 10 \quad 3 \text{ p.}$$

Ennek megoldásai  $x_1 = \frac{5}{6}$  és  $x_2 = \frac{2}{3}$ . 3 p.

A másodikra az eredeti egyenlet nincs értelmezve, ezért hamis gyök. 1 p.

A (\*) lépés kivételével a többi ekvivalens átalakítás volt, az  $x_2$  gyök nem esik egybe a (\*)-nál tett kikötéssel, ezért jó gyök. A hibátlan indoklás: 2 p.

(Az első 2 pont + az utolsó 1+2 p. jár akkor is, ha nem tesz kikötést, de a behelyettesítéseket elvégzi.)

**Össz.: 14 pont**

5. Hozd egyszerűbb alakra, majd állítsd növekvő sorrendbe a következő kifejezéseket.

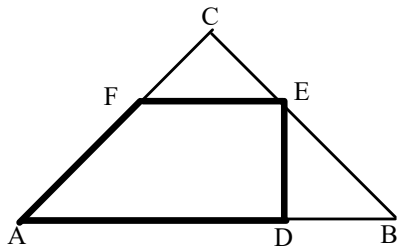
$$x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \quad y = 7 - 2\sqrt{3} - \sqrt{27}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{48} + \sqrt{47}} + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{48}}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \quad 4 \text{ p.}$$

$$y = 7 - 2\sqrt{3} - \sqrt{27} = 7 - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 7 - 5\sqrt{3} \quad 4 \text{ p.}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{48} + \sqrt{47}} + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{48}} = \\ &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{4 - 3} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{5 - 4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5} + \dots + \frac{\sqrt{48} - \sqrt{47}}{48 - 47} + \frac{\sqrt{49} - \sqrt{48}}{49 - 48} = \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{48} - \sqrt{47} + \sqrt{49} - \sqrt{48} = \sqrt{49} - \sqrt{3} = 7 - \sqrt{3} \end{aligned} \quad 5 \text{ p.}$$

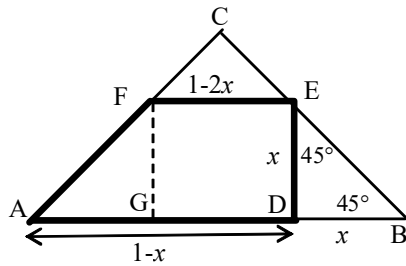
A fentiekből már látható, hogy  $y < x < z$ . 2 p. **Ö.: 15 pont**



6. Az  $AB = 1$  dm átfogójú,  $ABC$  egyenlő szárú derékszögű. háromszögbe írjunk az ábra szerint  $ADEF$  derékszögű. trapézt.

Ha a  $DB$  szakasz hossza  $x$ , akkor milyen hosszúak a trapéz oldalai?

Milyen  $x$  esetén lesz a trapéz területe maximális?



Legyen  $BD=x$ .  $\angle DBE = \angle DEB = 45^\circ$ , ezért  $DE=x$  2 p.

Ekkor  $AD=1-x$  és mivel  $AG=x$ , ezért  $FE=GD=1-2x$  2 p.

$AF= \sqrt{2} \cdot x$ . 1 p.

A trapéz területe  $t = \frac{(1-x+1-2x)x}{2} = \frac{1}{2}(2-3x) \cdot x$  3 p.

Alakítsuk át ezt úgy, hogy a változót tartalmazó tényezők összege állandó legyen és alkalmazzuk a mértani és a számtani közép összefüggését.

$$t = \frac{1}{2}(2-3x) \cdot x = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} - x \right) \cdot x \leq \frac{3}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} - x + x}{2} \right)^2 = \frac{1}{6} \quad 4 \text{ p.}$$

Ebből látható, hogy a trapéz területe nem lehet nagyobb, mint  $\frac{1}{6} \text{ dm}^2$ . 1 p.

Ennyi akkor és csak akkor lehet, ha a számtani közép összefüggésében szereplő tényezők egyenlők:  $\frac{2}{3} - x = x$ ,  $\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ dm}$ . 2 p.

A maximális területű trapéz alapjai  $\frac{1}{3} \text{ dm}$  és  $\frac{2}{3} \text{ dm}$ , magassága  $\frac{1}{3} \text{ dm}$ . 1 p.

**Össz.: 16 pont**

**Második megoldás** a terület maximumának meghatározására

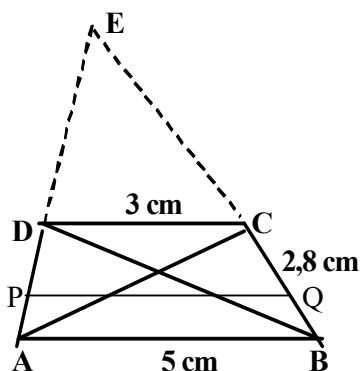
$t = \frac{1}{2}(2-3x) \cdot x$ , ez  $x$ -nek másodfokú függvénye, amelynek zérushelyei  $x_1=0$  és  $x_2=\frac{2}{3}$ .

Beszorzás után látható, hogy  $x^2$  együtthatója negatív, ezért a két zérushely számtani közepénél,  $x = \frac{1}{3} \text{ dm}$ -nél maximuma van.  $t_{\max} = \frac{1}{6} \text{ dm}^2$ . 8 p.

**Harmadik megoldás** a terület maximumának meghatározására

$$t = \frac{1}{2}(2-3x) \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + x = -\frac{3}{2} \left( x^2 - \frac{2}{3}x \right) = -\frac{3}{2} \left[ \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right] = -\frac{3}{2} \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6}$$

Ebből látható, hogy a trapéz területének  $x = \frac{1}{3} \text{ dm}$ -nél van maximuma, és  $t_{\max} = \frac{1}{6} \text{ dm}^2$ . 8 p.



7. Az ABCD trapéz szárainak egyenesei E-ben metszik egymást. Az ábrán  $AB=5$  cm,  $CD=3$  cm,  $BC=2,8$  cm. Mekkora az EC szakasz?

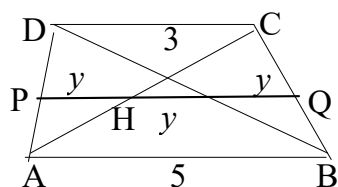
Az ABE háromszög területe T, mekkora a CDE háromszög és az ABCD trapéz területe?

Mekkora annak az ábrán berajzolt, alapokkal párhuzamos PQ szakasznak a hossza, amelyet az átlók három egyenlő részre osztanak?

Legyen  $EC=x$ ,  $EDCA \sim EAB\Delta$ , mert párhuzamos helyzetűek  $\Rightarrow \frac{x}{x+2,8} = \frac{3}{5} \Rightarrow x=4,2$  cm 3 p.

Az  $EDCA$  és  $EAB\Delta$  hasonlóságának aránya  $DC:AB = 3:5$ , ezért a területek aránya  $9:25$ , tehát

$t_{EDCA} = \frac{9}{25}T$ , az ABCD trapéz területe  $\frac{16}{25}T$ . 3 p.



Ha a  $PQ \parallel AB$ , és a PQ szakaszt az átlók harmadolják, akkor

$PHA\Delta \sim ACD\Delta \Rightarrow y:3 = AH:AC$ , 3 p.

$CHQ\Delta \sim CAB\Delta \Rightarrow 2y:5 = CH:CA$ . 3 p.

Ezeket összeadva  $y/3 + 2y/5 = 1$ .

Ebből  $y = 15/11$  cm,  $PQ = 45/11$  cm. 3 p.

(Az átlók metszéspontja felett is van egy megfelelő szakasz, amely hasonlóan számolható. Hossza  $45/13$  cm.)

**Össz.: 17 pont**

# Arany János Tehetséggondozó Program matematikaversenye 2021.

## 11. évfolyam

1. Egy társaságban 12 házaspár jött össze. Mindenki mindenkivel kezét fogott, kivéve a saját házastársával. Hány kézfogás történt?

Egy másik alkalommal kevesebb házaspár jött el, most is ilyen módon történtek a kézfogások, de az utolsónak érkező Kovács házaspár már csak a házigazda házaspárral fogott kezét. Így ez alkalommal csak 116 kézfogás történt. Hány házaspár volt ezen az estélyen?

Ha  $n$  házaspár volt az estélyen, akkor a kézfogások száma  $\frac{2n \cdot (2n - 2)}{2} = 2n^2 - 2n$ . 3 p.

12 házaspárnál ez  $2 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12 = 264$  kézfogás. 2 p.

Ha Kovácsék megérkezése előtt  $k$  házaspár volt jelen, akkor az ő kézfogásaik száma  $2k^2 - 2k$ . Kovácsék és a házigazdák kézfogásainak száma 4, ezért  $2k^2 - 2k + 4 = 116$ . 4 p.

Ennek pozitív megoldása  $k = 8$ . 2 p.

Tehát Kovácsékkal együtt 9 házaspár volt az estélyen. 1 p.

**Össz.: 12 pont**

2. Az ABC háromszögben  $AC=2$ ,  $BC=\sqrt{12}$ . A velük szemközti szögek aránya 1 : 2. Mekkora a háromszög szögei?

Írjuk fel a háromszögre a szinusztételt.  $\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{12}}{2}$  3 p.

$$\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} . \quad 6 p.$$

Egy háromszögben csak  $\beta = 30^\circ$  az egyetlen megfelelő szög. 2 p.

A háromszög szögei  $\alpha = 2\beta = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ . 2 p.

**Össz.: 13 pont**

3. Milyen  $p$  esetén lesz valós megoldása az  $x^2 + (2p - 1)x + p^2 + 2 = 0$  egyenletnek? Milyen  $p$  esetén lesz az egyenlet egyik gyöke a másik gyök kétszerese?

Az egyenletnek akkor lesz megoldása, ha diszkriminánsa nem negatív.

$$\begin{aligned} (2p-1)^2 - 4(p^2+2) &\geq 0 \\ 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 - 8 &\geq 0 \\ -4p &\geq 7 \\ p &\leq -\frac{7}{4} \end{aligned} \quad 2 p.$$

Tehát  $p \leq -\frac{7}{4}$  esetén lesz valós megoldása az egyenletnek. 3 p.

Ha az egyenlet két gyöke  $x_1$  és  $x_2$ , akkor a következőknek kell teljesülni.

$$x_1 + x_2 = 1 - 2p, \quad x_1 x_2 = p^2 + 2, \quad x_2 = 2x_1, (*) \Leftrightarrow \quad 3 p.$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 = 1 - 2p, \quad 2x_1^2 = p^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left( \frac{1-2p}{3} \right)^2 = p^2 + 2 \Leftrightarrow 2 - 8p + 8p^2 = 9p^2 + 18 \Leftrightarrow 0 = p^2 + 8p + 16 \quad 2 p.$$

Ennek egy valós gyöke van  $p=-4$ , tehát  $p=-4$  esetén lesz egyik gyök a másik kétszerese. 2 p.

Ell: Az  $x^2-9x+18=0$  egyenletnek Két valós gyöke van  $x_1=3$  és  $x_2=6$ , valóban az egyik a másikkal kétszerese. 2 p.

**Össz.: 14 pont**

Ellenőrzés helyett elegendő annak megállapítása is, hogy  $-4 < -\frac{7}{4}$  ezért  $p=-4$  estén valóban két valós gyök van, ezért erre (\*) feltételeknek teljesülni kell.

4. a) **Hány nullára végződik  $30!$  ?**

b) **Határozzuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyekre  $n!$  pontosan 12 nullára végződik?**

c) **Határozzuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyekre  $n!$  pontosan 30 nullára végződik?**

a)  $30! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30$ .

A szorzat  $k$  db 0-ra végződik, ha osztható  $10^k$ -nal, de  $10^{k+1}$ -nel már nem.

$10^k = 2^k \cdot 5^k$ , ezért azt keressük, hogy az  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30$  szorzatban maximum hány 2-es és 5-ös tényező szerepel. 2 p.

Nyilván 5-ösből szerepel kevesebb. Az 5, 10, 15, 20, 25 és 30 tényezőkben szerepel az 5, de 25-ben kétszer, ezért  $30!$ -ban összesen 7 db 5-ös szerepel (és ennél több 2-es,) tehát  $30!$  hét 0-ra végződik. 2 p.

b) Olyan  $n!$ -t keresünk, amelyben pontosan 12 db 5-ös tényező szerepel.

Az 5, 10, 15, ... 50 számok mindegyikében szerepel 5-ös tényező, de a 25-ben és az 50-ben két 5-ös tényező van, ezért  $50!$ -ban pontosan 12 5-ös tényező, (és ennél több 2-es) szerepel tehát  $50!$  pontosan 12 nullára végződik. 3 p.

Az  $51!$ ,  $52!$ ,  $53!$  és  $54!$  számokban még nem lesz újabb 5-ös tényező, ezért ezek is pontosan 12 nullára végződnek. 2 p.

c) Az 5, 10, 15, ... 120, összesen 24 db számban szerepel 24 db 5-ös tényező, a 25, 50, 75, 100 számokban még egy-egy 5-ös tényező, tehát a  $120!$ ,  $121!$ ,  $122!$ ,  $123!$  és  $124!$  számok 28 db 0-ra végződnek. 2 p.

Mivel 125-ben három 5-ös tényező van ezért  $125!$ -ban már 31 5-ös tényező szerepel, ezért már 31 nullára végződik (és az utána következő faktoriális-számok is legalább 31 nullára végződnek.) 2 p.

Tehát nincs olyan  $n$ , hogy  $n!$  pontosan 30 nullára végződjön. 1 p.

**Össz.: 14 pont**

5. **Határozzuk meg a következő kifejezések minimumát, ha  $x, y$  pozitív valós számok.**

$$a) x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6, \quad b) 2x + \frac{8}{x}, \quad c) 8x^2 + \frac{54}{x}.$$

a) Alakítsunk ki teljes négyzeteket.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 6 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1. \quad 2 p.$$

$(x-1)^2$  és  $(y-2)^2$  nem negatív, így az egész kifejezés minimuma 1, 1 p.

Ennyi akkor és csak akkor lehet, ha  $x=1$  és  $y=2$ .

Ezek pozitív valós számok, ezért megfelelnek a feltételnek. 1 p.

- b) Számítani és mértani közép összefüggésének segítségével meghatározhatjuk olyan összeg minimumát, amelyben a tagok szorzata állandó.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{8}{x}} = 8$$

Tehát  $2x + \frac{8}{x}$  nem lehet kisebb 8-nál, ennyi akkor és csak akkor lehet ha  $2x = \frac{8}{x}$ .

Ebből  $x=2$  vagy  $x=-2$ , de a feladat szerint csak az  $x=2$  jó.

5 p.

- c) Ahhoz, hogy a tagok szorzata állandó legyen, át kell alakítani a kifejezést:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \\ \Rightarrow 8x^2 + \frac{54}{x} &= 8x^2 + \frac{27}{x} + \frac{27}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{27}{x} \cdot \frac{27}{x}} = 54 \end{aligned} \quad 4 \text{ p.}$$

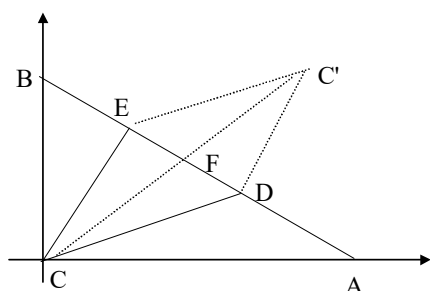
Látható, hogy  $8x^2 + \frac{54}{x}$  nem lehet kisebb mint 54. 1 p.

Ennyi akkor és csak akkor lehet, ha a számtani és mértani közép összefüggésében szereplő tagok egyenlők, azaz  $8x^2 = \frac{27}{x}$ . Ebből  $x = \frac{3}{2}$ . 1 p.

**Össz.: 15 pont**

6. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a D és E pontok három egyenlő részre osztják. Igazoljuk, hogy  $CD^2 + DE^2 + CE^2 = \frac{2}{3} \cdot AB^2$ .

**I. megoldás:**



Az AB átfogó F felzöpontja ED-nek is felezöpontja. Tükörözzük a CDE háromszöget F-re, ekkor a CDC'E paralelogrammát kapjuk, amelyben  $CC' = AB$ . **5p.**

Ezen paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő:

$$2CD^2 + 2CE^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot AB\right)^2 + AB^2! \quad /+ 2DE^2 \quad 5 \text{ p.}$$

$$2CD^2 + 2CE^2 + 2DE^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot AB\right)^2 + AB^2 + 2DE^2$$

$$2CD^2 + 2CE^2 + 2DE^2 = \frac{12}{9} \cdot AB^2 \quad /:2$$

$$CD^2 + CE^2 + DE^2 = \frac{2}{3} \cdot AB^2 \quad 5 \text{ p.}$$

## II. megoldás:

Alkalmazhatjuk a háromszög súlyvonalára vonatkozó  $4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$  összefüggést az ACE háromszög CD ill. a BCD háromszög CE súlyvonalára.

$$4CD^2 = 2CA^2 + 2CE^2 - \left(\frac{2}{3}AB\right)^2, \quad 4CE^2 = 2CB^2 + 2CD^2 - \left(\frac{2}{3}AB\right)^2. \quad 6 \text{ p.}$$

Ezeket összeadva, és 2-vel osztva, valamint felhasználva, hogy  $CA^2 + CB^2 = AB^2$  és  $DE^2 = \frac{1}{9}AB^2$ .

$$CD^2 + CE^2 = CA^2 + CB^2 - \frac{4}{9}AB^2$$

$$CD^2 + CE^2 = AB^2 - \frac{4}{9}AB^2 \quad / + DE^2$$

$$CD^2 + CE^2 + DE^2 = \frac{5}{9}AB^2 + DE^2$$

$$CD^2 + CE^2 + DE^2 = \frac{2}{3}AB^2$$

9 p.

**Össz.: 15 pont**

## III. megoldás:

Helyezzük el a derékszögű háromszöget koordináta-rendszerben, pl. legyen A(3a;0), B(0;3b) és C(0;0) ekkor D(2a;b) és E(a;2b).

6 p.

Ekkor  $CD^2 = 4a^2 + b^2$ ,  $CE^2 = a^2 + 4b^2$ ,  $DE^2 = a^2 + b^2$  és  $AB^2 = 9a^2 + 9b^2$ .

Így a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldala  $6a^2 + 6b^2$ .

9 p.

**Össz.: 15 pont**

## 7. A friss gomba 80%-a víz. A szárított gombának már csak 30 %-a víz. Hány százalékkal csökken a gomba tömege a szárítás során?

Ha a friss gomba tömege  $M$ , akkor ebből  $0,8M$  a víz,  $0,2M$  a száraz anyag. 4 p.

Legyen a szárított gomba tömege  $m$ , ebből  $0,3m$  a víz,  $0,7m$  a száraz anyag 5 p

Száritásnál a száraz anyag tömege nem változik, tehát  $0,7m = 0,2M$ . 3 p.

Ebből  $m/M = 0,2 / 0,7 \approx 0,2857$ , tehát a szárított gomba tömege az eredetinek 28,57 %-a, azaz 71,43 %-kal csökkent a gomba tömege a szárításnál. 5 p.

**Össz.: 17 pont**

(Ha konkrét tömegekkel számol, és nem indokolja meg, hogy ezt miért lehet, max. 13 pontot kaphat. )