# 9. osztály

1. „Fanyűvő és én együtt 20 nap alatt vágnánk ki a Nagy Kerek Erdőt” – mondja Törzsök Jankó. „Bár ha Erdődöntögetővel dolgoznék, akkor ezt a munkát öt nappal előbb befejeznénk.” „Nekem jobb ötletem van” – mondja Erdődöntögető. „Ha én dolgoznék együtt Fanyűvővel, akkor mi ketten egy ötödével kevesebb idő alatt végeznénk a munkával, mint ha Törzsök Jankóval dolgoznék.” Mennyi idő alatt vágnák ki a Nagy Kerek Erdőt külön-külön ezek az erős emberek, és mennyi idő alatt végeznének a munkával, ha mindhárman együtt dolgoznának?

   *Peics Hajnalka, Szabadka*

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in N^+$ számra a $(2n+1)^2+(2n+2)^2+(2n+3)^2$ kifejezés felírható 4 különböző pozitív egész szám négyzetösszegeként.

   *Bencze Mihály, Brassó*

3. Az ***ABC*** egyenlő szárú háromszögben $\boldsymbol{A}\measuredangle$ =100°. Vegyük fel az ***AB*** szár ***B***-n túli meghosszabbításán a ***D*** pontot úgy, hogy ***AD***=***BC*** legyen. Mekkorák a ***BCD*** háromszög szögei?

   *Katz Sándor, Bonyhád*

4. Az $ABC$ háromszög $AB$, $BC$, $CA$ oldalait meghosszabbítjuk a B, C és A pontokon túl a $BB_1$, $CC_1$, $AA_1$ szakaszokkal úgy, hogy $BB_1 = AC$, $CC_1 = AB$, $AA_1 = BC$ legyen. Jelölje továbbá az $ABC$, $AA_1B$, $BB_1C$, $CC_1A$ háromszögek területét $T_{ABC}, T_{AA_1B}, T_{BB_1C}, T_{CC_1A}$. Mutassuk meg, hogy $T_{AA_1B}+T_{BB_1C}+T_{CC_1A} \geq 3T_{ABC}$ .

   *Pintér Ferenc, Nagykanizsa*

5. Legfeljebb hány oldalú az a konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (A feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem).

   *Kiss Sándor, Nyíregyháza*

6. A 957 háromjegyű szám mögé írjunk három számjegyet úgy, hogy a kapott hatjegyű szám osztható legyen 9-cel, 5-tel és 7-tel is! Melyek ezek a háromjegyű számok?

   *Pintér Ferenc, Nagykanizsa*

# 10. osztály

1. Legyen egy háromszög három oldalának a hossza a, b, c. Bizonyítsuk be, hogy
$$3 \le \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \le 4$$
Mikor állhat fenn egyenlőség?

*Kántor Sándorné, Debrecen*

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!
$$\begin{cases} 4x^2 - 3y = xy^3 \\ x^2 + x^3y^2 = 2y \end{cases}$$

*Balázsi Borbála, Beregszász*

3. Az ***AB*** szakaszon vegyük fel a ***C*** és ***D*** pontokat úgy, hogy $AC = CD = DB$ legyen és legyen $CDEF$ egy tetszőleges paralelogramma. Legyen ***G*** az ***AE*** és ***DF***, ***H*** pedig a ***BF*** és ***CE*** metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $AB = 9GH$ .

*Olosz Ferenc, Szatmárnémeti*

4. Egy ***2n*** oldalú, szimmetria középponttal rendelkező konvex sokszöglap (***P***) csúcspontjai közül kiválasztunk hármat, jelöljük őket ***A***, ***B***, ***C***-vel. Igazoljuk, hogy az ***ABC*** háromszög ***t*** területe nem nagyobb, mint $\frac{T}{2}$, ahol ***T*** a ***P*** sokszöglap területét jelöli.

*Dályay Pál Péter, Szeged*

5. Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2011 és az oldalak mérőszáma egész szám?

*Szabó Magda, Szabadka*

6. Adott nyolc különböző pozitív egész szám a tízes számrendszerben. Képezzük bármely kettő (pozitív) különbségét, majd az így kapott 28 számot szorozzuk össze. 6-nak melyik az a legnagyobb kitevőjű hatványa, amivel ez a szorzat biztosan osztható?

*Kiss Sándor, Nyíregyháza*

# 11. osztály

1. Igazoljuk, hogy
$$\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}} < \frac{2}{3}$$
bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén.

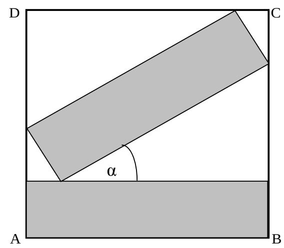
*Kovács Béla, Szatmárnémeti*

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a
$$6\sqrt{x-2}+10\sqrt{2x+3}+12\sqrt{3x+3}=6x+74$$
egyenletet.

*Olosz Ferenc, Szatmárnémeti*

3. Egy négyzetbe az ábra szerint két egybevágó téglalapot írunk. Mekkora az ***α*** szög?

*dr. Katz Sándor, Bonyhád*




4. Legyen az ***ABC*** háromszög ***AB*** oldalának ***A***-hoz közelebbi harmadolópontja ***P***, az ***A***-tól távolabbi harmadolópontja ***Q***. Legyen továbbá a ***BC*** oldalon a ***B***-hez közelebbi harmadolópont ***R***, a ***B***-től távolabbi harmadolópont ***S***. Legyen a ***CA*** oldalon a ***C***-hez közelebbi harmadolópont ***T***, a ***C***-től távolabbi harmadolópont ***U***. Legyen a ***PS*** és ***BT*** szakaszok metszéspontját az ***U*** ponttal összekötő egyenes és a ***BC*** szakasz metszéspontja ***V***. Határozzuk meg a ***BUV*** háromszög és a ***PQRSTU*** hatszög területének arányát.

*Bíró Bálint, Eger*

5. Egy 10x10-es táblázat minden sorába és minden oszlopába az ábrán látható módon beírjuk a számokat 0-tól 9-ig, majd minden sorban és minden oszlopban bekeretezünk pontosan 1 számot, tehát összesen 10-et. Van-e a bekeretezett számok között mindig legalább két azonos szám?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | … | 9 |
| 9 | 0 | 1 | … | 8 |
| 8 | 9 | 0 | … | 7 |
| … | … | … | … | … |
| 1 | 2 | 3 | … | 0 |

*Szabó Magda, Szabadka*

6. Jelölje tetszőleges pozitív egész ***n*** szám esetén $t(n)$ az ***n*** szám különböző prímosztóinak számát. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész ***n*** szám van, amelyre
   a.) $t(n^2+n)$ páratlan.
   b.) $t(n^2+n)$ páros.

*Borbély József,Tata*

# 12. osztály

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a, b, c$ pozitív valós számok kielégítik az
$$5abc > a^3 + b^3 + c^3$$
egyenlőtlenséget, akkor létezik $a, b, c$ oldalú háromszög.

*Oláh György, Komárom*

2 Legyen $a_n \left(n \in N^+\right)$ a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész szám. (Ha ***n*** négyzetszám, akkor $a_n = \sqrt{n}$.) Mennyi az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2011}}$ összeg értéke?

*Kántor Sándor, Debrecen*

3. Az ***ABC*** háromszögbe írható kör ***O*** középpontjára illeszkedő ***e*** egyenes az ***AB*** és ***AC*** oldalakat ***M*** és ***N*** pontokban metszi. ***D*** és ***E*** a ***BO*** és ***CO*** egyenesek olyan pontja, amelyre ***ND*** ∥ ***ME*** ∥ ***BC***. Igazoljuk, hogy az ***A***, ***D*** és ***E*** pontok egy egyenesre illeszkednek.

*Katz Sándor, Bonyhád*

4. Az ***ABC*** háromszög ***A*** csúcsához tartozó magasságának a ***BC*** oldal egyenesén levő talppontja ***D***. A ***B*** és ***C*** pontokból az ***A*** csúcsból induló belső szögfelezőre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre ***E*** és ***F***. Az ***EF*** és ***BC*** szakaszok metszéspontja ***M***. Legyen az ***ABC*** háromszög területe ***T***, a ***DEF*** háromszög területe ***t***.
Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}$.

*Bíró Bálint, Eger*

5. Adott egy tetszőleges poliéder. Lehet-e a csúcsaiba pozitív egész számokat írni a következő módon:
ha él köt össze két csúcsot, akkor a csúcsokba írt számok relatív prímek,
ha két csúcs nincs éllel összekötve, akkor a csúcsokba írt számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb.

*Kántor Sándor, Debrecen*

6 Létezik-e olyan négyzetszám, amelynek a számjegyeinek összege $2011^{2010}$?

*Szabó Magda, Szabadka*