12. osztály

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c pozitív valós számok kielégítik az
$$5abc > a^3 + b^3 + c^3$$
egyenlőtlenséget, akkor létezik a, b, c oldalú háromszög.

Oláh György, Komárom

Megoldás
Az állítást ellentmondásra való visszavezetéssel bizonyítjuk.

Valamilyen pozitív a, b, c valós számokra érvényes legyen az egyenlőtlenség, amelyekre nem létezik a, b, c oldalú háromszög.

Ez azt jelenti, hogy az a, b, c számokra legalább egy háromszög egyenlőtlenség nem érvényes.

Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $c \geq a + b$, vagyis c = a + b + x, ahol $x \geq 0$.

Ezt az eredeti egyenlőtlenségbe való behelyettesítés után kapjuk:
$$5ab(a+b+x) > a^3 + b^3 + (a+b)^3 + 3x(a+b)^2 + 3(a+b)x^2 + x^3$$
rendezve
$$2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 + abx + 3(a^2+b^2)x + 3(a+b)x^2 + x^3$$
$$0 > 2a^3 + 2b^3 - 2a^2b - 2ab^2 + abx + 3(a^2+b^2)x + 3(a+b)x^2 + x^3$$
$$0 > 2a^2(a-b) + 2b^2(b-a) + abx + 3(a^2+b^2)x + 3(a+b)x^2 + x^3$$
$$0 > 2(a-b)(a^2-b^2) + abx + 3(a^2+b^2)x + 3(a+b)x^2 + x^3$$
$$0 > 2(a-b)^2(a+b) + abx + 3(a^2+b^2)x + 3(a+b)x^2 + x^3$$

A jobb oldalon minden tag nem negatív, így ellentmondásra jutottunk, tehát létezik a, b, c oldalú háromszög.

2 Legyen a_n $\left(n \in N^+\right)$ a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész szám. (Ha ***n*** négyzetszám, akkor $a_n = \sqrt{n}$.) Mennyi az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}}$ összeg értéke?

Kántor Sándor, Debrecen

Megoldás

Legyenek k és n olyan pozitív egész számok, amelyekre

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{és} \quad n < 2011,$$

így

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}$$

azaz

$$k^2 - k < n \le k^2 + k$$

Egyenlőség továbbra sem lehet a bal oldalon.

Tehát az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2011}}$ összegben $\frac{1}{k}$ értéke

$$\left(k^2 + k\right) - \left(k^2 - k\right) = 2k \text{-szor fordul elő,}$$

és ezek összege

$$2k \cdot \frac{1}{k} = 2.$$

Mivel $2011 = 44^2 + 44 + 31$ ezért a keresett összeg

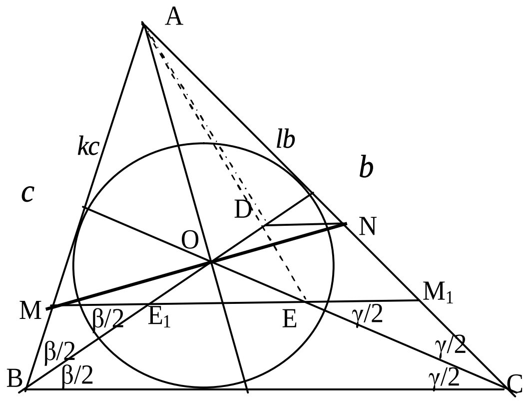
$$44 \cdot 2 + 31 \cdot \frac{1}{45} = 88\frac{31}{45}.$$

3. Az ***ABC*** háromszögbe írható kör ***O*** középpontjára illeszkedő ***e*** egyenes az ***AB*** és ***AC*** oldalakat ***M*** és ***N*** pontokban metszi. ***D*** és ***E*** a ***BO*** és ***CO*** egyenesek olyan pontja, amelyre ***ND*** ‖ ***ME*** ‖ ***BC***. Igazoljuk, hogy az ***A***, ***D*** és ***E*** pontok egy egyenesre illeszkednek.

Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás

Az ME egyenes messe OB egyenest E_1.ben, és az AC oldalt M_1-ben!



Legyen AM=*kc* és AN=*lb*.

Ekkor MB=ME_1 =(1-*k)c* és EM_1=M_1C=(1-*k*)*b*.

Szögfelezőtétel miatt MO:ON=*kc: lb*.
DNOΔ~ME_1OΔ.

Ezekből DN:ME_1=ON:OM=*lb:kc*

Így DN : AN =DN : *lb* = ME_1: *kc*=(1-*k*):*k*.

De EM_1:AM_1 =CM_1:AM_1 is ugyanennyi.

Ezért ADNΔ ~ AEM_1Δ, mert megegyeznek két oldal arányában és a közbezárt γ szögben.

Ezért az A csúcsnál levő szögük is megegyezik, tehát A, D és E egy egyenesre illeszkednek.

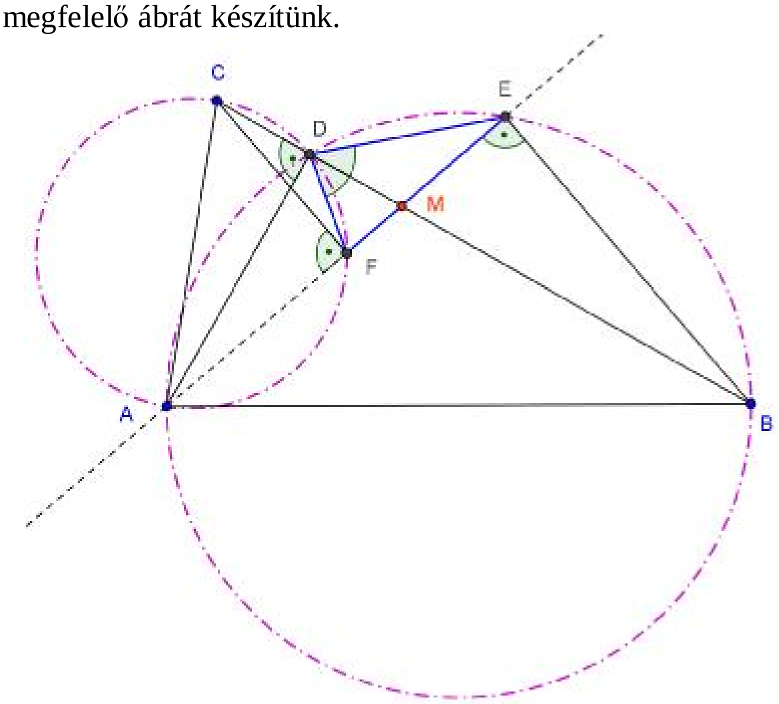
4. Az ***ABC*** háromszög ***A*** csúcsához tartozó magasságának a ***BC*** oldal egyenesén levő talppontja ***D***. A ***B*** és ***C*** pontokból az ***A*** csúcsból induló belső szögfelezőre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre ***E*** és ***F***. Az ***EF*** és ***BC*** szakaszok metszéspontja ***M***. Legyen az ***ABC*** háromszög területe ***T***, a ***DEF*** háromszög területe ***t***.

   Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}$.

Bíró Bálint, Eger

Megoldás

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk.



Az AB szakasz a D és E pontokból derékszögben látszik, ezért D és E rajta van az AB, mint átmérő fölé írt Thalész-körön. Ebből az is következik, hogy $ABED$ húrnégyszög. Hasonlóképpen, mivel az AC szakasz a D és F pontokból derékszögben látszik, ezért D és F illeszkedik az AC Thalész-körére, és ezért $ACDF$ húrnégyszög.

Mivel $ABED$ húrnégyszög, ezért $DEF\angle = DEA\angle = DBA\angle$, mert az utóbbi két szög az AD húrhoz tartozó kerületi szög. Ugyanakkor $ACDF$ is húrnégyszög, amelynek szemben fekvő szögei $180°$-ra egészítik ki egymást, azaz $ACD\angle + DFA\angle = 180°$.

A $DFA\angle$ és $DFE\angle$ szögek ugyancsak $180°$-ra egészítik ki egymást, így $ACD\angle = ACB\angle = DFE\angle$.

A DEF és ABC háromszögekben tehát két-két szög, mégpedig a $DEF\angle = CBA\angle$ és a $DFE\angle = ACB\angle$ szögek nagysága egyenlő, ezért a harmadik szögek mértéke is azonos, vagyis a két háromszög hasonló.

Hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért $\frac{t}{T} = \left(\frac{FD}{AC}\right)^2 = \frac{FD^2}{AC^2}$, ebből pedig $\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FD}{AC}$ következik.

A DEF és ABC háromszögekben tehát $EDF\angle = BAC\angle$.

Viszont az $ABED$ húrnégyszögben az $EDB\angle$ és az $EAB\angle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. A feltétel szerint az AE egyenese felezi a $BAC\angle$-et, így $EAB\angle = \frac{BAC\angle}{2} = \frac{EDF\angle}{2} = EDB\angle$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy a BC egyenes is felezi az EDF szöget.

Felírjuk a belső szögfelező tételét az ABC háromszögre, eszerint $\frac{AC}{AB} = \frac{CM}{BM}$, ahonnan $AC = \frac{AB \cdot CM}{BM}$.

Ugyancsak a belső szögfelező tétele szerint a DEF háromszögben $\frac{FD}{DE} = \frac{FM}{EM}$, ahonnan $FD = \frac{DE \cdot FM}{EM}$.

Az utóbbi két eredményt beírva a $\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FD}{AC}$ összefüggésbe, azt kapjuk, hogy $\sqrt{\frac{t}{T}} = \frac{FM \cdot BM \cdot DE}{EM \cdot CM \cdot AB}$, ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

5. Adott egy tetszőleges poliéder. Lehet-e a csúcsaiba pozitív egész számokat írni a következő módon:
   ha él köt össze két csúcsot, akkor a csúcsokba írt számok relatív prímek,
   ha két csúcs nincs éllel összekötve, akkor a csúcsokba írt számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb.

Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás

Az elhelyezés lehetséges, ennek bizonyítását egy, a feltételeknek megfelelő elhelyezés megadásával végezzük. Az elhelyezés során számokat fogunk írni a csúcsokba és a végső értéket a beírt számok szorzata fogja jelenteni.

Először vegyük a csúcsokat valamilyen sorrendben és az első csúcsra írjuk az első prímszámot (2-t), a második csúcsra a második prímszámot (3-at) és így tovább a többi csúcsra. Ez véges sok lépés után véget ér.

Ezek után vegyük az első olyan párt, amelyiket nem köt össze él és ide írjuk be (mind a két helyre) a soron következő prímszámot. Majd vegyük a következő össze nem kötött párt és folytassuk ezt az eljárást. Ez is véges sok lépés után véget ér.

Legvégül a csúcsokba írt számokat szorozzuk össze és a szorzatot írjuk végérvényesen a csúcsokba.

Nézzük, hogy teljesülnek-e a feltételek:

Ha él köt össze két csúcsot, akkor oda csupa különböző prímszámot írtunk, hiszen közös prím csak akkor kerülhetne mind a kettőbe, ha nem lennének összekötve.

Ha nem köt össze él két csúcsot, akkor van olyan prím, ami mind a kettőben szerepel, tehát a legnagyobb közös osztójuk biztosan nem 1.

Tehát ez az elhelyezés kielégíti a feltételeket.

6 Létezik-e olyan négyzetszám, amelynek a számjegyeinek összege 2011^{2010}?

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás

2011^{2010}-es szám kilenccel osztva 1-et ad maradékul, ugyanis

$$2011^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1 \qquad (\text{mod } 9)$$

$$2011^{2010} \equiv \left(2011^3\right)^{670} \equiv 1^{670} \equiv 1 \qquad (\text{mod } 9)$$

azaz $2011^{2010} = 9n+1$ alakú.

Tekintsük az $x = 2\cdot 10^k - 1$ alakú számokat, ahol ***k*** pozitív egész szám. Erre

$$x^2 = (2\cdot 10^k - 1)^2 = 4\cdot 10^{2k} - 4\cdot 10^k + 1 =$$

$$= 4\underbrace{00\ldots0}_{2k} - 4\underbrace{00\ldots0}_{k} + 1 = 3\underbrace{99\ldots9}_{k-1}600\ldots01$$

Az x^2 számjegyeinek összege $3 + 9(k-1) + 6 + 1 = 9k+1$.

Ha ***k*** értékét egyesével növeljük, akkor a számjegyek összege kilenccel fog nőni, tehát minden $9n+1$ alakú számot fel fog venni, így 2011^{2010}-et is.

Másik konstrukció!

Tekinthetnénk az $x = \underbrace{33\ldots3}_{k-1}2 = \frac{10^k - 4}{3}$ számokat, ahol ***k*** pozitív egész szám. Erre

$$x^2 = \underbrace{33\ldots3}_{k-1}2^2 = \left(\frac{10^k - 4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(10^{2k} - 8\cdot 10^k + 16) =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2k} - 1) - 8\cdot\frac{1}{9}(10^k - 1) + 1 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{2k} - \underbrace{88\ldots8}_{k} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{k-1}0\underbrace{22\ldots2}_{k-1}4$$

Az x^2 számjegyeinek összege $(k-1) + 2(k-1) + 4 = 3k+1$.

Ha ***k*** értékét egyesével növeljük, akkor a számjegyek összege hárommal fog nőni, tehát minden $3n+1$ alakú számot fel fog venni, így 2011^{2010}-et is.