A Fibonacci-számok

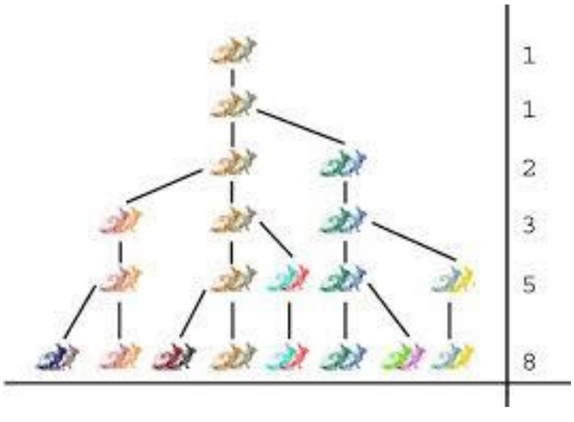
Gyakran tesszük fel a kérdést „Miért is tanulunk matematikát?”. Sokszor csak azt a választ kapjuk, hogy mert ezt tudni kell a következő órára, vagy, mert a vizsgán szükségünk lesz erre a tudásra. Ám ha jobban belegondolunk, a matematika igazából abban segít, hogy megtanuljunk logikusan és kreatívan gondolkodni. Ezenkívül ha kicsit jobban odafigyelünk, akkor észre fogjuk venni, hogy a matematika emellett izgalmas és szép is. A mindennapjainkat is átszövi a matematika. Erre egy remek példa a Fibonacci sorozat. Ez egy matematikához kevésbé értő ember számára is könnyen felfogható, hiszen a sorozat következő tagját mindig az előző két tag összegeként kapjuk meg. Emellett, ha jobban megvizsgáljuk a sorozat tagjait, akkor sok érdekességet is észre vehetünk velük kapcsolatban.

Legyen $F_0=0$, $F_1=1$ és $n\geq 2$-re legyen $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Az így definiált F_n sorozatot nevezzük Fibonacci-sorozatnak, a tagjait pedig Fibonacci-számoknak.
A sorozat első néhány tagja:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

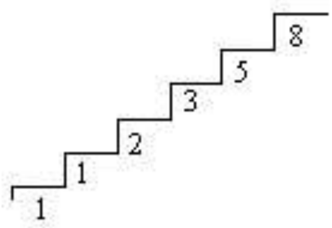
A személy, akihez ezt a sorozatot kötjük, egy XII-XIII. századi itáliai matematikus, Fibonacci vagy más néven Leonardo di Pisa. Ezek a számok a ’Liber Abaci’ (magyarul Könyv az abakuszról) című könyvében tűntek fel. A műben a sorozathoz kapcsolódó feladat egy képzeletbeli nyúlcsalád növekedéséről szólt:

Hány pár nyúl lesz n hónap múlva, ha tudjuk, hogy kezdetben egyetlen újszülött nyúlpár van, minden nyúlpár havonta új párnak ad életet, amely a második hónaptól lesz tenyészképes, és feltételezzük, hogy egyetlen pár sem pusztul el?



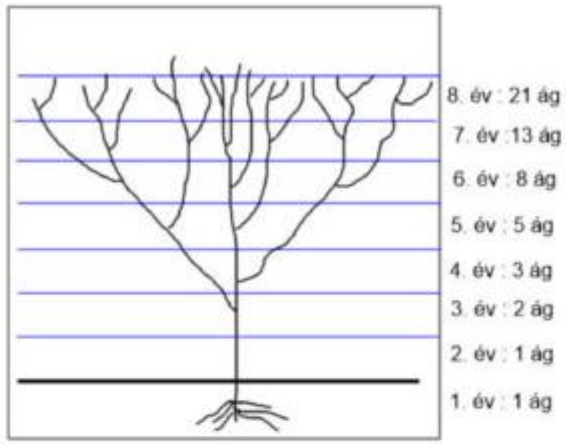
Minden hónap végére annyi pár nyulunk lesz, amennyi az előző hónap végén volt (mivel ezek nem pusztulnak el), és még annyival több, ahány pár két hónappal ezelőtt volt (ezek mindegyike szintén új nyúlpárnak fog életet adni). Az első hónapban egy pár nyúl volt. Ezeknek a harmadik hónapban fog először utódjuk születni. A negyedik hónapban ennek a nyúlpárnak még nem fog utódja születni, de a szüleiknek igen, így már három pár nyúl lesz. A következő hónapokban ez így fog folytatódni. Tehát havonta a párok száma: 1,1,2,3,5,8,13,21… Az n-edik hónapban F_n pár nyúl lesz.

Egy másik klasszikus feladat: ***Hányféleképpen juthatunk fel egy n fokú lépcső tetejére, ha minden lépésben egy vagy két fokot haladunk felfelé?***



Tekintsük a kiindulási helyzetet az első lépcsőfoknak (F_1=1). Innen az első fokra egyféleképpen lehet feljutni, F_2=1. A harmadikra már kétféleképpen lehet lépni: vagy az elsőről lépünk kettőt vagy a másodikról egyet, tehát F_3=2. A negyedikre a másodikról vagy a harmadikról tudunk lépni, ezért $F_4=F_2+F_3=1+2=3$. És így tovább számítható ki, hogy az n-edik lépcsőfokra $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ féle módon lehet feljutni.

A sorozat szemléltetésére szokták még használni a következő példát:



Egy fa az ültetést követő második évben hoz először új ágat. Ezt követően minden új ág a következő évben gyarapszik és két éves korától hoz minden évben egy új ágat. Hány ága lesz a fának n év múlva?

A Fibonacci-számoknak rengeteg megjelenési formájuk van. Találkozhatunk velük a természetben is, például egy virág szirmainak száma Fibonacci-szám, egy toboz vagy egy ananász pikkelyei is Fibonacci-spirálba rendeződnek. De ha csupán csak a számokat vizsgáljuk meg kicsit alaposabban, akkor is gyönyörű szabályos mintákat fedezhetünk fel.

Az első példában emeljük négyzetre az első néhány Fibonacci-számot:
Az nyilvánvaló, hogyha összeadjuk a sorozat szomszédos tagjait, akkor a következő tagot kapjuk, hiszen alapból így képeztük a sorozatot. De nézzük meg mi történik akkor, ha a négyzeteiket adjuk össze.
1+1=2
1+4=5
4+9=13
9+25=34 … Az így kapott számok mind a Fibonacci-sorozat páratlanadik tagjai lesznek.

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025

A második példában nézzük meg, mi történik, ha összeadjuk az első néhány Fibonacci-szám négyzetét:

1+1+4=6
1+1+4+9=15
1+1+4+9+25=40
1+1+4+9+25+64=104
1+1+4+9+25+64+169=273… Ezek a számok nem tagjai a sorozatnak, de, ha jobban megnézzük őket, felfedezhetjük bennük a Fibonacci-számokat.

Hiszen $6=2\cdot3$

$15=3\cdot5$

$40=5\cdot8$

$104=8\cdot13$

$273=13\cdot21$ … Sejtés: a sorozat tagjainak négyzetösszege két szomszédos Fibonacci-szám szorzatát adják, vagyis $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2=f_n\cdot f_{n+1}$

Bizonyítás: *Bizonyítsuk a sejtést teljes indukcióval!*

n=1-re az állítás igaz, hiszen $f_1^2=f_1\cdot f_2 \rightarrow 1^2=1\cdot1$

Nézzük meg igaz-e az állítás n+1-re is!

$f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2+f_{n+1}^2=f_{n+1}\cdot f_{n+2}$

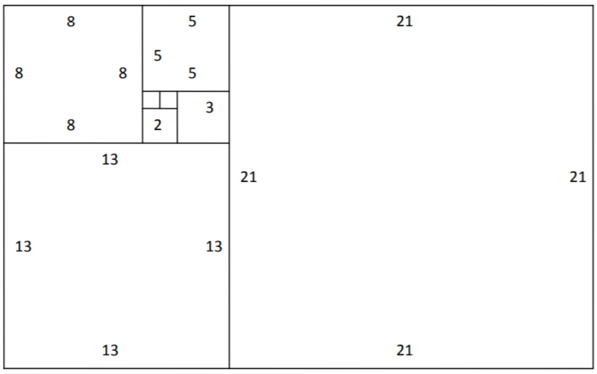
Az indukciós feltevést és a Fibonacci-sorozat képzési szabályát felhasználva az egyenlet így alakul át:

$f_n\cdot f_{n+1}+f_{n+1}^2=f_{n+1}\cdot(f_n+f_{n+1})$

$f_n\cdot f_{n+1}+f_{n+1}^2=f_n\cdot f_{n+1}+f_{n+1}^2$ Az egyenlet mindkét oldalát átalakítva egy azonosságot kapunk, amellyel bizonyítottuk az állítást.

Egy egyszerű ábrával is megmutatható miért is igaz a sejtésünk:

Vegyünk egy 1·1-es négyzetet majd mellé még egyet. Ez a kettő együtt egy 1·2-es téglalapot alkot. Majd tegyünk alá egy 2·2-es négyzetet, majd az így kapott 3·2-es téglalap mellé egy 3·3-as négyzetet. És így tovább…



Nézzük meg mekkora a területe az így kapott téglalapnak! Először is a téglalap területe nyilvánvalóan megegyezik a kis négyzetek területeinek összegével, hiszen azokból raktuk össze. Másrészt kiszámítható úgy is, hogy a téglalap oldalainak hosszát szorozzuk össze. $T=21\cdot(21+13)=21\cdot34 \rightarrow 21+13=34$, ami a következő Fibonacci-szám.

Mivel ugyanazt a területet írtuk fel kétféleképpen, ezért értelemszerűen igaz lesz köztük az egyenlőség. $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2+21^2=21\cdot(13+21)=21\cdot34$

Érdemes azt is megfigyelni mi köze van a Fibonacci-számoknak az aranymetszéshez!

Aranymetszésnek nevezzük azt, amikor úgy osztunk fel egy szakaszt két részre, hogy a kisebbik szakasz úgy aránylik a nagyobbhoz, ahogyan a nagyobb szakasz az egészhez.

Vegyünk egy egységnyi hosszú szakaszt és jelöljük a hosszabb szakaszt x-szel az aranymetszésnek megfelelően, a kisebb szakasz pedig 1-x lesz.

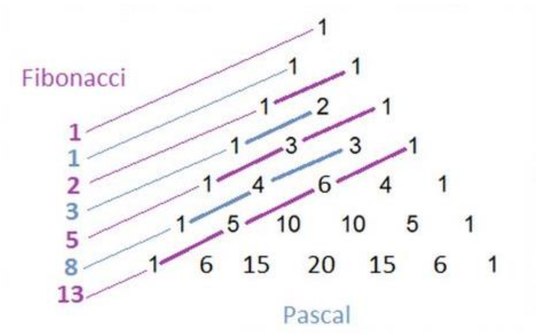
Írjuk fel az arányokra az egyenlőséget: $\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}$

x^2+x-1=0 Az egyenlet egyik gyöke negatív, ami ebben az esetben nem jó, mivel két szakasz aránya nem lehet negatív. A másik gyöke pedig $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Az 1 pontos aranymetszete ez a szám, tizedes törtre kerekítve ≈0,618033

Ha megfigyeljük, mi köze van a Fibonacci-sorozatnak az aranymetszéshez, azt vesszük észre, hogy a sorozat szomszédos tagjainak a hányadosa folyamatosan közelít az aranymetszés értékéhez.

$\frac{8}{13}$ = 0,615; $\frac{13}{21}$ = 0,619; $\frac{21}{34}$ = 0,6176; $\frac{34}{55}$ = 0,61818; $\frac{55}{89}$ = 0,6179; $\frac{89}{144}$ = 0,61805...

A tizedik hányados már négy számjegyben egyezik az aranymetszés értékével.



Érdekesség még, hogy a Fibonacci-számok kapcsolatban vannak a Pascal-háromszöggel is. A Pascal-háromszögben, ha a vonalak mentén összeadjuk a binomiális együtthatókat, akkor a Fibonacci-sorozat tagjait fogjuk kapni.

<u>További feladatok a Fibonacci-számokkal kapcsolatban:</u>

1. *Egy n x 2-es négyzetrácsot hányféleképpen lehet 1x2-es dominókkal lefedni?*

2. *Egy lakótelep felújításánál úgy akarják lefesteni a házak falát, hogy minden emelet vagy fehér, vagy narancs legyen. Esztétikai okokból azt előre kikötötték, hogy két egymás alatti emelet nem lehet narancs. Hányféleképpen lehet lefesteni ezek alapján egy n emeletes panelházat?*

3. $\frac{1}{1}; \frac{1}{1+\frac{1}{1}}; \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}...$ *Határozzuk meg következő sorozatot!*

4. *Bizonyítsuk be, hogy* $f_n^2+f_n \cdot f_{n+1}+(-1)^n=f_{n+1}^2$ *!*

5. *Határozzuk meg a Fibonacci-sorozat első n elemének összegét!*

6. *Hányféleképpen mehetünk fel egy 15 fokú lépcső tetejére, ha egy lépésben egyszerre egy vagy két fokot léphetünk és kétszer egymás után nem léphetünk két fokot?*

<u>Felhasznált források:</u>

https://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_the_magic_of_fibonacci_numbers/transcript?source=googleplus&language=hu#t-96606
https://www.radnoti-szeged.sulinet.hu/document/hu_1014.pdf
https://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-sz%C3%A1mok
https://matekarcok.hu/fibonacci-sorozat/
https://web.cs.elte.hu/~hgy/jegyzet/jegyzet_Fibonacci.pdf

Készítette: Bauer Lujza