Nevezetes közepek

Csillagprogramos dolgozat

Készítette: Bauer Lujza 12.c

Nevezetes közepek

Nagyon sokat gondolkoztam azon, hogy a matematika mely területéről kellene választanom a dolgozatom alapjául szolgáló témát. Mindenféleképpen olyat szerettem volna, ami egy matematikában kevésbé jártas ember számára is érdekes lehet, de közben nehezebb feladatokat is lehet találni hozzá. Így esett a választásom a nevezetes közepekre, mivel ezek között van olyan, amelyet bárki használt már életében, csupán másképp nevezte azt. Gondoljunk csak arra, amikor a diákok a jegyeik átlagát számolják ki, hogy megtudják, milyen jegyre számíthatnak majd a bizonyítványukban. Emellett az élet számos területén használjuk a közepeket, de ezt a dolgozat későbbi részeiben szeretném majd bővebben kifejteni.

Matematikatörténeti szempontból az mondható el, hogy mint sok más is a matematikán belül a nevezetes közepek története is a görögökig vezethető vissza. Még az időszámításunk előtti VI-V. században Pitagorasz és tanítványai foglalkoztak először ezzel a témával. Hozzájuk köthető az a : b = b : c aránypár. Feltételezhetően az 1 és a 2 mértani közepének keresésekor találták meg az első irracionális számot, a $\sqrt{2}$ –t.

Gimnáziumi matematika tanulmányaink során négy közepet ismertünk meg és az ezek közti összefüggéseket alkalmaztunk a feladatok megoldása során. Ezek a számtani közép, a mértani közép, a harmonikus közép és a négyzetes közép.

Számtani közép

Definíció: a és b számok számtani vagy aritmetikai közepe (a,b>0): A(a;b)= $\frac{a+b}{2}$

Mértani közép:

Definíció: a és b számok mértani vagy geometriai közepe (a,b>0): G(a;b)=$\sqrt{a \cdot b}$

Harmonikus közép:

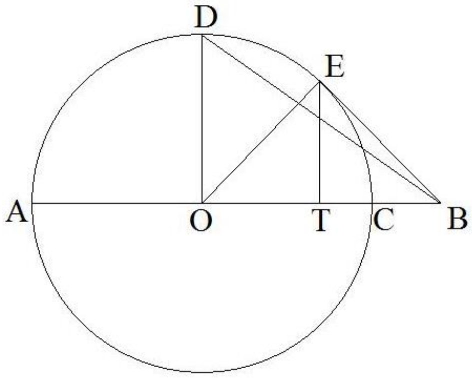
Definíció: a és b számok harmonikus közepe (a,b>0): H(a;b) = $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

Négyzetes közép:

Definíció: a és b számok négyzetes közepe (a,b>0): N(a;b) = $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Nevezetes közepek közötti összefüggések

harmonikus közép (H) ≤ mértani közép (G) ≤ számtani közép (A) ≤ négyzetes közép (N)
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a=b.



Ezzel az ábrával remekül szemléltethetők a nevezetes közepek közötti összefüggések. Belátható, ha AB=a és BC=c, akkor:

- BO az a és b számtani közepe: BO=BC+OC= $= b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$
- BE az a és b mértani közepe: az érintő- és szelőszakaszok tétele alapján
- BT az a és b harmonikus közepe: a BTE háromszögre felírva a befogótételt: EB=$\sqrt{OB \cdot BT} \rightarrow$ BT=$\frac{2ab}{a+b}$
- BD az a és b négyzetes közepe: az OBD háromszögben a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható.

<u>A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség</u>

Bizonyítás: $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$

Emeljük négyzetre! (a négyzetre emelés nem fogja megváltoztatni a relációt)

$a \cdot b \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

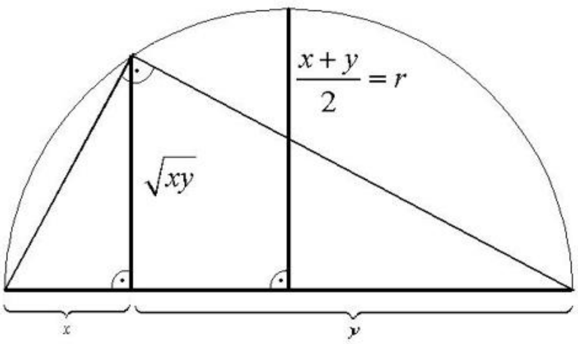
$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$

$0 \leq a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Ez az egyenlőtlenség mindig igaz lesz, mert egy szám négyzete nemnegatív.

A többi egyenlőtlenség is hasonló módon belátható.

Bizonyítás: másik módszerrel



Ezen az ábrán jól látszik az, hogy mit is szeretnénk bizonyítani. A kör átmérőjét két részre x-re és y-ra bontjuk. Tudjuk, hogy x+y=2r. Ebből következik, hogy r = $\frac{x+y}{2}$. Tehát r az x és y szakaszok számtani közepe. Ábrázoljuk a sugarat az átmérőre merőlegesen. Az átmérőre állítsunk merőlegest az x és y szakszok közös végpontjába. Az átmérő két végpontja és a köríven az harmadik pont derékszögű háromszöget alkot a Thalesz-tétel miatt. A magasságtétel alapján az mondható el, hogy a derékszögű háromszögben az átmérőhöz tartozó magasság mértani közepe az átmérő két szeletének. Az ábrán így látható, hogy a félkörív bármely pontját is választjuk a derékszögű csúcshoz, a háromszög magassága legfeljebb sugár hosszúságú lehet, ami megegyezik x és y számtani közepével. Ezzel bizonyítottuk az egyenlőtlenséget.

A közepeket sokféle matematika feladatban fel tudjuk használni. Például egy szélsőértékes feladat megoldása során, amely lehet algebrai vagy geometriai témájú is vagy a statisztika témakörében.

A nevezetes közepek hétköznapi használata

Ahogyan már a dolgozat elején is írtam, azért is választottam ezt a témát, mert a hétköznapi életben is visszaköszön több helyen. Elsősorban amikor egy adatsokaságot jellemzünk különböző szempontokból. A számtani közepet használjuk akkor, amikor valaminek az átlagát szeretnénk kiszámolni. Talán ez a legismertebb és leggyakoribb előfordulása. A mértani közepet a geometriában való alkalmazása mellett (magasságtétel, befogótétel) használjuk a növekedési ütem kiszámítására is. Ahogyan a számtanit úgy a négyzetes közepet is a statisztikai számítások során alkalmazzák, és a szórást lehet vele kiszámítani. A harmonikus közepet pedig például az átlagsebesség meghatározására lehet használni.

Megoldott példafeladatok

1. *Azon téglatestek közül, amelyekre igaz, hogy V=2A melyiknek a legkisebb a térfogata?*

Megoldás: abc = 2 · [2(ab+bc+ca)]

abc = 4 · (ab+bc+ca)   V = abc mikor minimális?

Írjuk fel a téglatest felszínére a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$\sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot cb} \leq \frac{ab+bc+ca}{3}$

A feladat szövege alapján felírhatjuk, hogy $\frac{ab+bc+ca}{3} = \frac{V}{12}$ és $\sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot cb} = \sqrt[3]{V^2}$

Tehát $\frac{V}{12} \geq \sqrt[3]{V^2}$. Emeljük köbre az egyenlőtlenséget.

$\frac{V^3}{12^3} \geq V^2$

$V \geq 12^3$

V minimális értéke 12^3. Ezt akkor veszi fel, ha ab = bc = ca. Tehát, ha a=b=c, vagyis a téglatest egy kocka.

2. *Mutassuk meg, hogy ha α, β és γ egy háromszög szögei, akkor*

$$(sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma)^2 > 9\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta \cdot sin\,\gamma. \text{ (KöMaL B.4427.)}$$

Megoldás: Írjuk fel a számtani és mértani közép közötti összefüggést a szögek szinuszaira.

$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$ Emeljük négyzetre az egyenlőtlenséget!

$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 \geq 9\,(\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma)^{\frac{2}{3}} > 9 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

Mivel α, β, és γ egy háromszög szögei, ezért elmondható a szinuszukról, hogy pozitív értéket vesz fel és legfeljebb 1 lehet. Illetve nem lehet mindhárom szög szinusza egyszerre 1.

$0 < \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma < 1$

Ezzel megmutattuk, hogy miért igaz a fenti egyenlőtlenség.

3. *Mutassuk meg, hogy a számtani és mértani közép közötti összefüggés három változó esetén is igaz lesz.*

Megoldás: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

Vezessünk be egy új ismeretlent! $d = \frac{a+b+c}{3}$

$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}}$

$\frac{\frac{4}{3}\cdot(a+b+c)}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}}$ Emeljük negyedik hatványra!

$(\frac{a+b+c}{3})^4 \geq a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}$

Osszuk le $\frac{a+b+c}{3}$ – mal! Lehet osztani vele, mert a, b és c pozitív számok.

$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq a \cdot b \cdot c$ Vonjunk harmadik gyököt!

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

Ezzel bebizonyítottuk a két közép közötti összefüggést. Az egyenlőtlenség természetesen más módszerekkel is belátható.

További nevezetes közepekkel megoldható feladatok:

1. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a>1 valós számra fennáll az* $\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16} \geq 1$ *egyenlőtlenség.*

2. Egy R sugarú gömb belsejébe egy hengert rajzolunk. Ezen hengerek közül melyiknek lesz a legnagyobb területű palástja?

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pozitív valós számok, n pedig pozitív egész szám:*

$x_1+x_2+\ldots+x_n=9$,

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}=1$. *(KöMaL B.5121.)*

4. Legyenek x és y nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{2}}=\sqrt{x+y}$ *(KöMaL C.822.)*

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a+b)^3 = 27ab$, *akkor* $a\leq 4$ *és* $b\leq 4$.

Felhasznált források:

https://www.komal.hu
https://abesenyei.web.elte.hu/theses/molnar.pdf
https://hu.wikipedia.org/wiki/Matematikai_k%C3%B6zepek
http://kfg.kormend.hu/katalogus/81_1_20101118152117.pdf
Az Erdős iskolai füzeteimben talált jegyzetek illetve feladatok

Készítette: Bauer Lujza