Függvényegyenletek

A középiskolai oktatásban általában olyan egyenleteket és egyenletrendszereket vizsgálunk, illetve oldunk meg a valós számok halmazán, amelyekben egy vagy több ismeretlen szerepel adott számok vagy paraméterek mellett. Ugyanakkor matematikai szakkörökön, versenyeken gyakran találkozhatunk olyan egyenletekkel, amelyek ismeretlen hozzárendelési szabállyal rendelkező függvényeket is tartalmaznak számok, paraméterek vagy ismert függvények mellett. Ezen egyenletek megoldásánál meg kell határoznunk a függvényt, amelyre az egyenlet teljesül. Dolgozatomban ilyen feladatokat gyűjtöttem össze és oldottam meg.

1. feladat

Határozzuk meg az $f : R \setminus \{-1\} \to R$ függvényt, amely teljesíti az $f(x+\sqrt{(x^2+1)}) = x/(x+1)$ $(x \in R \setminus \{-1\})$ egyenletet !

$$f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{x}{x+1}$$

Legyen $x+\sqrt{x^2+1} = t$

$$f(t) = \frac{x}{x+1}$$

$$x+\sqrt{x^2+1} = t$$

$$\sqrt{x^2+1} = t-x$$

$$x^2+1 = t^2+x^2-2*t*x$$

$$2*t*x+1 = t^2$$

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{x}{x+1}$$

$$f(t) = \frac{\frac{t^2-1}{2*t}}{\frac{t^2-1}{2*t}+1} = \frac{\frac{t^2-1}{2*t}}{\frac{t^2-1+2*t}{2*t}} = \frac{t^2-1}{t^2-1+2*t}$$

$$f(t) = \frac{t^2-1}{t^2-1+2*t}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-1}$$

A feladat megoldásához az Euler-féle behelyettesítési módszert alkamaztam, amely segítségével további hasonló feladatok is megoldhatóak. A második feladat egy olyan függvényegyenlet, ahol a keresett függvény két különböző helyen felvett értéke is szerepel.

2. feladat

Határozzuk meg az $f : R \rightarrow R$ függvényt, amely teljesíti az $2f(x) + 3f(1-x) = 4x-1$ egyenletet!

Tegyük fel hogy a függvény egy konstans értéket ad !

$$f(x) = c$$

$$2c + 3c = 4x - 1$$

$$5c = 4x - 1$$

$$x = \frac{5c+1}{4}$$

Ez nem lehetséges, x értéke nem lehet konstans, hiszen a függvényben x bármely valós szám értékét felveheti.

Tegyük fel, hogy a függvény elsőfokú !

$$f(x) = ax + b$$

$$2(ax + b) + 3(a(1 - x) + b) = 4x - 1$$

$$2ax + 2b + 3a - 3ax + 3b = 4x - 1$$

$$3a + 5b + 1 = 4x + ax$$

$$\frac{3a + 5b + 1}{4 + a} = x$$

Ez $a = -4$ esetén nem értelmezhető, ekkor x bármely valós szám értékét felveheti.

$$3a + 5b + 1 = (4 + a)x$$

$$4 + a = 0,\ tehát$$

$$3a + 5b + 1 = 0$$

$$5b = -3a - 1 = 11$$

$$b = \frac{11}{5}\ ;\ a\ =\ -4$$

$$f(x) =\ -4x + \frac{11}{5}$$

Tegyük fel, hogy a függvény másodfokú !

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;;\; a \neq 0$$

$$2ax^2 + 2bx + 2c + 3\left[a(1-x)^2 + b(1-x) + c\right] = 4x - 1$$

$$5ax^2 + (2b - 6a - 3b)x + 2c + 3a + 3b + 3c = 0x^2 + 4x - 1$$

2 polinom csak akkor lehet egyenlő, ha a megfelelő fokú tagok eggyütthatói egyenlőek. A kikötés szerint a nem lehet nulla, így ellentmondásra jutottunk. Ha feltesszük, hogy a függvény harmad, vagy annál magasabb fokú, hasonló ellentmondásba ütközünk, így a függvény biztosan elsőfokú, az egyetlen jó megoldás tehát :

$$f(x) = -4x + \frac{11}{5}$$

Egy másik módszer a második feladat megoldására

2 f(x) + 3f(1-x) = 4x-1

x helyére írjuk be *a* –t , majd *(1-a)* –t

$$x = a \;\rightarrow\; 2f(a) + 3f(1-a) = 4a - 1$$

$$x = 1 - a \;\rightarrow\; 2f(1-a) + 3f(a) = -4a + 3$$

$$4f(a) + 6f(1-a) = 8a - 2$$

$$6f(1-a) + 9f(a) = -12a + 9$$

$$9f(a) + 6f(1-a) - 6f(1-a) - 4f(a) = -12a + 9 - 8a + 2$$

$$5f(a) = 11 - 20a$$

$$f(a) = -4a + \frac{11}{5}$$

tehát

$$f(x) = -4x + \frac{11}{5}$$

3. feladat

Határozzuk meg az $f : R \to R$ függvényt, amely teljesíti az $f(x^2+x+1)+2f(x^2-x+1)= 3x^2-x+6$ egyenletet !

x helyébe írjuk be a -t $\quad x = a$

$$f\left(a^2+a+1\right)+2f\left(a^2-a+1\right)=3a^2-a+6$$

x helyébe írjuk be $-a$ -t $\quad x = -a$

$$f\left(a^2-a+1\right)+2f\left(a^2+a+1\right)=3a^2+a+6$$

$$2f\left(a^2-a+1\right)+4f\left(a^2+a+1\right)=6a^2+2a+12$$

vagyis

$$4f\left(a^2+a+1\right)+2f\left(a^2-a+1\right)-2f\left(a^2-a+1\right)-f\left(a^2+a+1\right)=6a^2+2a+12-3a^2+a-6$$

$$3f\left(a^2+a+1\right)=3a^2+3a+6$$

$$f\left(a^2+a+1\right)=a^2+a+2$$

legyen $b = a^2+a+1$

$$f(b)=b+1$$

tehát

$$f(x)=x+1$$

4. feladat

Határozzuk meg az $f : R \setminus \{1\} \to R$ függvényt, amely teljesíti az

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x \qquad (x \in R \setminus \{1\})$$ egyenletet !

x helyébe írjuk be a -t $\quad x = a$

$$f(a) + f\left(\frac{1}{1-a}\right) = a$$

x helyébe írjuk be $\frac{1}{1-a}$ -t $\quad x = \frac{1}{1-a}$

$$f\left(\frac{1}{1-a}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\right) = \frac{1}{1-a}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{1}{\frac{1-a-1}{1-a}} = \frac{1-a}{-a} = \frac{a-1}{a}$$

$$f\left(\frac{1}{1-a}\right) + f\left(\frac{a-1}{a}\right) = \frac{1}{1-a}$$

x helyébe írjuk be $\frac{a-1}{a}$ -t $\quad x = \frac{a-1}{a}$

$$f\left(\frac{a-1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}\right) = \frac{a-1}{a}$$

$$\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}} = \frac{1}{\frac{a-a+1}{a}} = a$$

$$f\left(\frac{a-1}{a}\right) + f(a) = \frac{a-1}{a}$$

Tudjuk tehát, hogy

$$f(a) + f\left(\frac{1}{1-a}\right) = a$$

$$f\left(\frac{1}{1-a}\right) + f\left(\frac{a-1}{a}\right) = \frac{1}{1-a}$$

$$f\left(\frac{a-1}{a}\right) + f(a) = \frac{a-1}{a}$$

az első és harmadik egyenletet összeadva, a második egyenletet kivonva :

$$f(a) + f\left(\frac{1}{1-a}\right) + f\left(\frac{a-1}{a}\right) + f(a) - f\left(\frac{1}{1-a}\right) - f\left(\frac{a-1}{a}\right) = a + \frac{a-1}{a} - \frac{1}{1-a}$$

$$2f(a) = a + \frac{a-1}{a} - \frac{1}{1-a}$$

$$2f(a) = \frac{a^2 + a - 1}{a} - \frac{1}{1-a}$$

$$2f(a) = \frac{\left(a^2 + a - 1\right)(1-a) - a}{a(1-a)} = \frac{a^2 + a - 1 - a^3 - a^2 + a - a}{a - a^2} = \frac{a^3 - a + 1}{a^2 - a}$$

$$f(a) = \frac{a^3 - a + 1}{2a^2 - 2a}$$

tehát

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x^2 - 2x}$$

Készítette : Jurasits Bálint