Geometriai feladatok megoldása szabályos háromszög segítségével

Csillagprogramos dolgozat

Készítette: Werner Péter

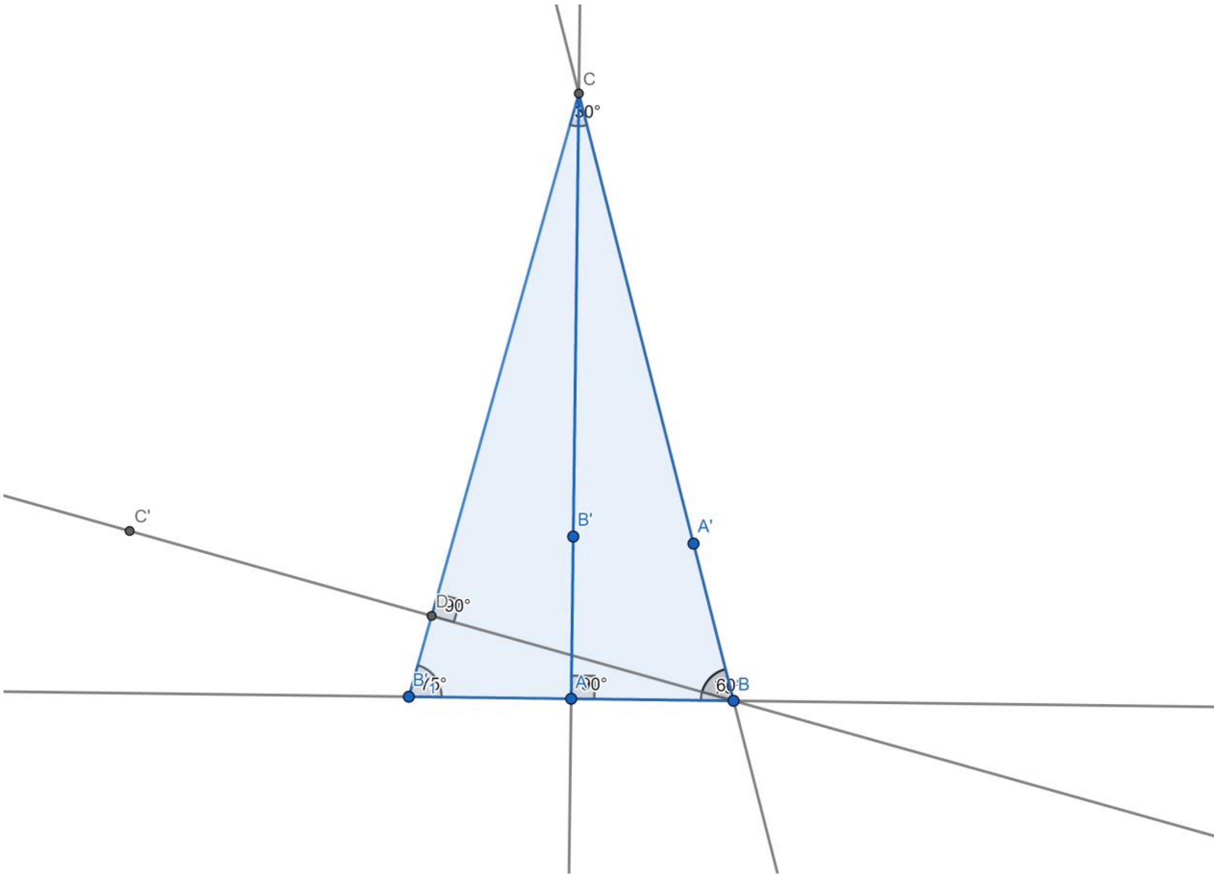
Geometriai feladatok megoldása szabályos háromszög segítségével

A geometriai feladatok megoldása sokszor nagyon komplex feladat lehet, egy ilyen ötlet vagy észrevétel, mint például szabályos háromszögek berajzolása lehet egyes feladatoknál a kulcs a megoldáshoz.

Ilyen észrevételekhez magas szintű intuícióra van szükségünk, azonban találhatunk kisegítő jeleket, motívumokat a feladatban, melyek rávezethetnek a helyes megoldáshoz. Ezeket tekintem át a következő néhány feladatban.

1. Bevezető Feladat

Adott egy derékszögű háromszög, melynek egyik szöge 15 fok, átfogója x. Határozzuk meg a háromszög területét szögfüggvények segítsége nélkül!

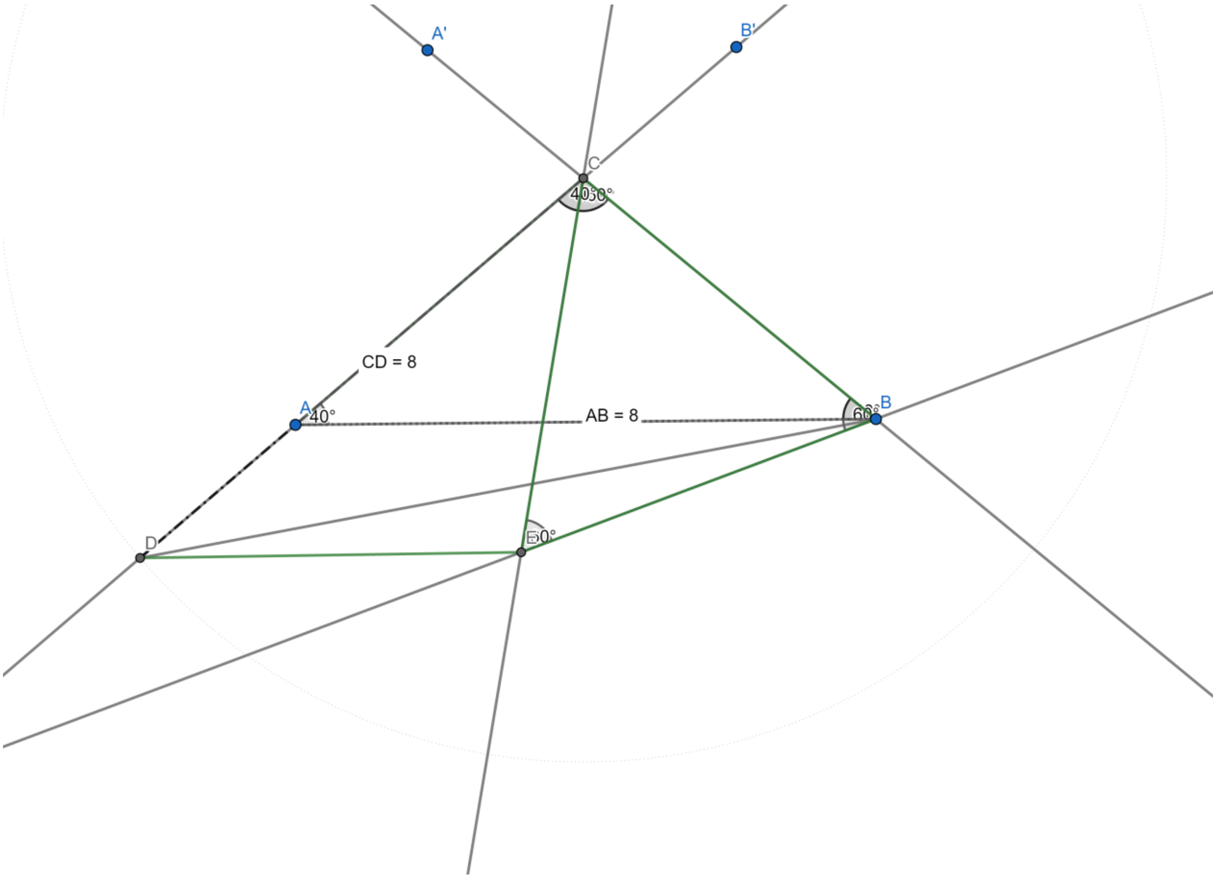


Tükrözzük, a háromszöget, majd húzzuk be a szemközti oldalhoz tartozó magasságot. Ekkor a tükrözés miatt kialakult 30 fokos szöghöz egy derékszög párosult, mely megadja a BCD félszabályos háromszöget, melyről tudjuk, hogy BC = 2DB. A tükrözés miatt BC = B_1C = x, tehát BD = x/2, vagyis az ABC háromszög területe $x^2/8$.

A megoldás menete sosem tiszta elsőre, azonban a feladat erősen utal arra hogy szabályos háromszöggel kapcsolatos a megoldás, hiszen a 15 negyede a 60-nak és 75-15=60, tehát egy sejtés kialakulhat ezáltal.

2. Feladat

Az ABC egyenlő szárú háromszögben C ∢ =100^o . Vegyük fel az AC szár A-n túlimeghosszabbításán a D pontot úgy, hogy AB=DC legyen. Mekkorák a ABD háromszög szögei?



Szerkesszünk szabályos háromszöget a CB oldalra, melynek 3. pontja legyen E! Ekkor az ACB szög 60^o-ra és 40^o-ra osztódik. Húzzuk be az EC szakaszt. Látható, hogy a DEC háromszög egybevágó ABC háromszöggel, hiszen AB=DC, CE=AC, valamint DCE $\sphericalangle = \mathrm{CAB}\sphericalangle = 40^o$.

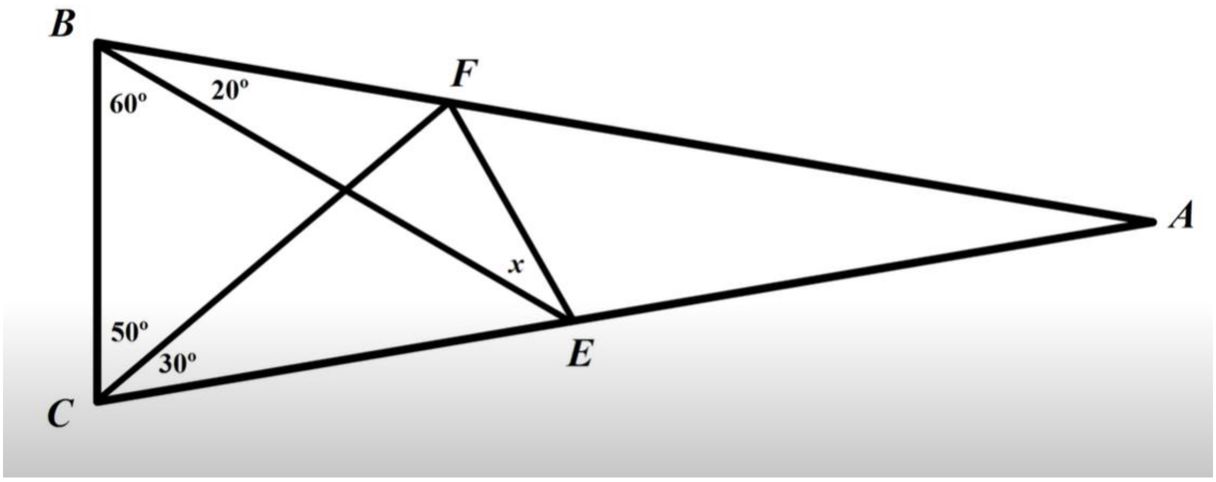
Ebből következően DE=EC=EB, így DEC háromszögben DEB$\sphericalangle = 160^o$, tehát EBD $\sphericalangle = \mathrm{EBD}\sphericalangle = 10^o$, így az ADB háromszög szögei 140^o, 30^o, 10^o.

A feladat önmagában nem tartalmazott technikai nehézséget, azonban magára az ötletre rájönni igencsak nehéz. Sejteni azonban lehet, egyrészt az AB=CD-t ki kell valahogy használnunk, másrészt pedig 100-60 = 40, ami megintcsak egy sejtést indíthat el.

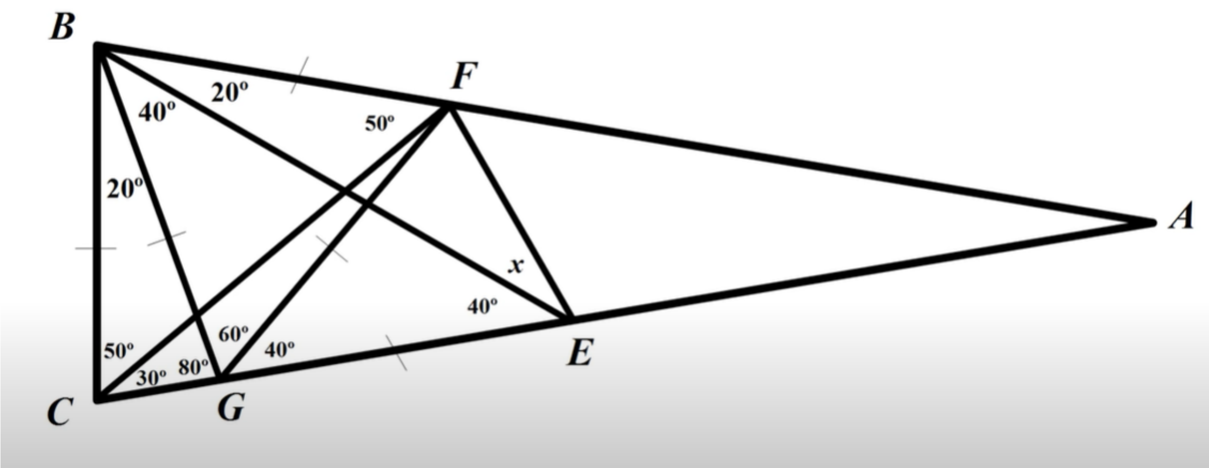
3. Feladat

A következő feladatot szokták a „legnehezebb egyszerű geometriafeladat”-nak emlegetni, hiszen megoldásához az előző feladathoz hasonlóan nem szükséges sok háttérismeret, azonban a megoldás önmagában igen nehéz.

ABC háromszög A-nál lévő szöge 20°, B-nél lévő szöge 80°. Jelöljük AC oldalon azt az E pontot, amire ABE∢ = 20°, AB oldalon azt az F pontot, amire ACF ∢ 30°. Mekkora a BEF szög?



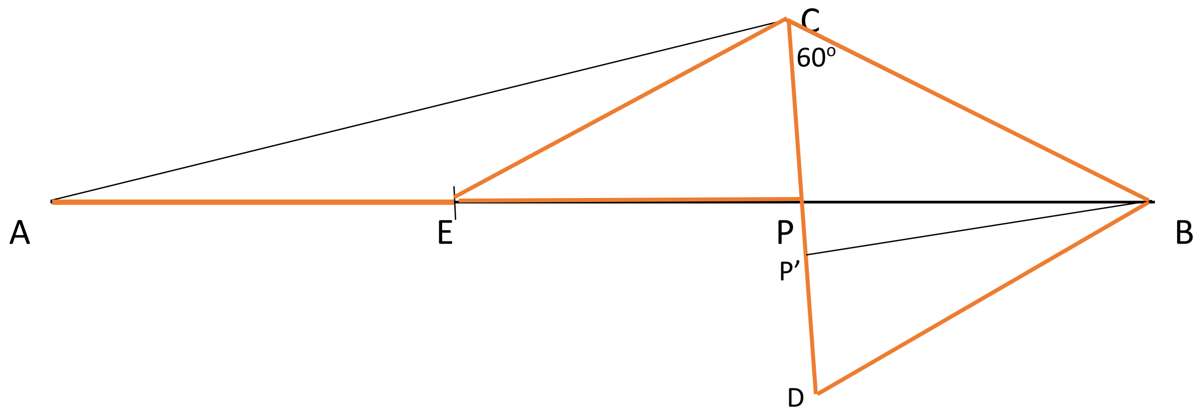
Az első dolog amin elindulhatunk, hogy BFC ∢ = 180°-50°-80°=50°, tehát a CBF háromszög egyenlő szárú, így BC=CF. Jelöljük a háromszög AC oldalán azt a G pontot, melyre BC=BG. Ekkor CBG ∢ =20°, így GBF ∢ = 60°, azonban tudjuk, hogy BG=GF, tehát BGF egy szabályos háromszög! Tekintsük a GBE háromszöget. Ebben EBG∢ = 40° és EGB∢ =100°, tehát GEB∢= 40°, amiből BG=GE. A GFE háromszögben FG=GE, és FGE∢ = 40°, valamint tudjuk, hogy GEB∢= 40°, így GEF ∢ = 40°+x, amiből x= 30°.



4. Feladat

(A következő feladatot én szerkesztettem a témában, ha valamilyen egyszerűbb megoldást, vagy hibát találnak a feladatban, kérem szóljanak.)

Adott ABC háromszög. Vegyük fel AB oldalra azt a P pontot, melyre AP=2BC. Ezenkívül tudjuk, hogy PCB∢ $=60^o$, valamint (BC-2PC)/PB=BC/PC. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit!



Szerkesszünk szabályos háromszöget a CB oldalra, majd rajzoljuk be a P' pontot, melyre PC=P'D. Ekkor kialakul a PP'B háromszög, amely egyenlő szárú a tükrözés miatt, és PP' szakasz megegyezik BC-2PC-vel, mert CD=BC. A P'PB szög megegyezik az EPC szöggel, valamint az arány miatt PP'/PB = EP/PC, tehát PP'B és PEC háromszögek hasonlóak, mert egy szögük és a két közbezárt oldalaik aránya megegyezik. Ebből következően PEC háromszög is egyenlő szárú, tehát PE=EC. Jelöljük x-szel az ECP szöget. Ekkor AEC szög 2x, amiből EAC és ECA szög 90-x, a CBE szög pedig 180-2x. A háromszög szögei így összesen 420-3x, amiből x = 80^o. A háromszög szögei 10^o, 20^o, és 150^o.

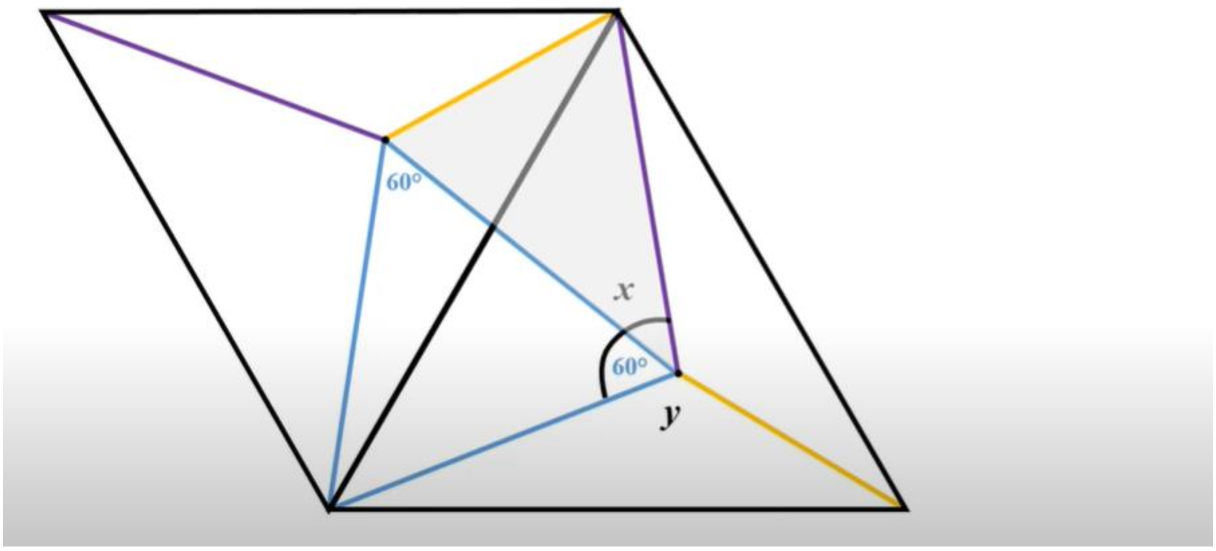
Ebben a feladatban az aránypár kifejezéséhez segített a szabályos háromszög berajzolása.

5. Feladat

Az utolsó feladat elsőre könnyűnek látszik, de nem egyszerű az ötletre rájönni. A feladat egyébként egy amerikai lapban jelent meg „Killer Problems" cím alatt.

Vegyünk egy szabályos háromszög belsejében egy tetszőleges P pontot, majd kössük össze a háromszög csúcsaival. Legyen APC szög x, APB szög y. A berajzolt 3 szakaszt átrendezve képezzünk egy új háromszöget. Fejezzük ki az új háromszög szögeit x és y segítségével!

A megoldás a 60 fokos forgatásban rejlik.



A forgatás után egy szabályos háromszög keletkezik, ezután pedig már könnyedén meg tudjuk mondani a háromszög szögeit: x-60^{o}, y-60^{o}, 300^{o}-x-y!

Werner Péter